定義 0.1. このとき、それぞれの変数に関する偏微分を以下の極限で定義する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta, y, \cdots) - f(x, y, \cdots)}{\Delta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x, y+\Delta, \cdots) - f(x, y, \cdots)}{\Delta}$$
$$\vdots$$

これらを $\partial_x f, \partial_y f$ のように略して表すこともある。さらにサボって f_x, f_y と表すこともある。

$(x, y, \cdots)$ を独立変数とするとき、つぎのように定める。

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{0.1}$$

熱力学では、いくつかある変数の中でどの変数を固定したか、添字にあらわに書き下す風習がある。たとえば定積比熱をつぎのように書く。

$$C_V = \Big(\frac{\partial U(T,V)}{\partial T}\Big)_V$$

下添え字の V は「V を固定した」という意味である[*8]。

定義 0.2 (ヤコビアン)**.** 次の行列式を（２変数の）ヤコビアンという。

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} := \begin{vmatrix} (\frac{\partial f}{\partial x})_y & (\frac{\partial g}{\partial x})_y \\ (\frac{\partial f}{\partial y})_x & (\frac{\partial g}{\partial y})_x \end{vmatrix} \tag{0.2}$$

ただし $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$ である。

行列式の性質よりただちに次がわかる

系 0.1.

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,y)} = -\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}$$

[*8] 実際はたとえば N も固定したことを暗黙に仮定していたりするので

$$C_V = \Big(\frac{\partial E(T,V)}{\partial T}\Big)_{V,N}$$

と書いた方が正しいはずだが、なぜか N の固定は明示的に書かなかったりすることも多い。

系 0.2.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(f,y)}{\partial(x,y)}$$

∵ (0.2) の定義と (0.1) より明らか。□

補題 0.1. つぎの恒等式が成立する。

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(f,g)}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \tag{0.3}$$

つまり $\partial(f,g)$ の部分が「相殺」している。

∵ 以下、統一的に表すため, $x_1 = x, x_2 = y$, $f = f_1, g = f_2$, $F = F_1, F = F_2$ と書く。

$F_i\,(i = 1,2)$ を $F_i = F_i(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$ と考えれば合成微分より、$(i,k = 1,2)$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1,2}\frac{\partial F_i}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \tag{0.4}$$

となる。　ここで 行列 A, B, C をそれぞれ

$$A_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad B_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial f_j}, \quad C_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

で定義すれば (0.4) は $A = BC$ と同じことである。 行列式の恒等式より $|A| = |BC| = |B||C|$ なので (0.3) が成立する。□

系 0.3.

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial Z}{\partial f}\right)_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

系 0.4.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y = 1 \qquad \text{すなわち} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_y}$$

これは系 0.3 で $Z = x$ とすればただちに従う。

系 0.5.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

これはついうっかり 1 としてしまいそうだが、正解は -1 となる。

∵ 左辺の各項をヤコビアンであらわすと

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,y)}$$

系 0.1 の性質を使えば上は次と等しい

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,x)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(y,x)}$$

$\partial(y,z)$ 同士、$\partial(y,x)$ 同士が「相殺」するので,　これは次に等しい

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(z,x)} = -1$$

最後は系 1 をつかってもヤコビアンの定義を用いても良い。□

上の系は単なる計算の技法であるが、熱力学の命題を示すときなどによく用いられるので、出てきた時に適宜思い出していただきたい。

0.3.2 線積分

高校以来 x 軸上の積分については馴染み深いと思うが、それを少し拡張したのが線積分である。これはすでに力学や電磁気学で出てきたものだと思う。

- 外力 $\mathbf{F}$ がかかっていて、それをある経路 C 上で移動させたとする。経路 C の小区間をあらわす線要素を $d\boldsymbol{\ell}$ とする。そのとき質点を押す力がする仕事 W は, 経路 C に関する線積分 $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ である。

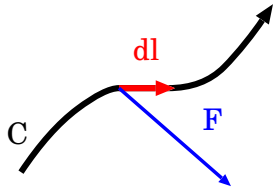
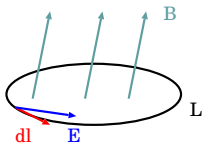


図 1

- ある閉曲線 $\mathcal{L}$ が囲む面積を貫く磁束が時間変化をしたとする。このとき $\mathcal{L}$ に沿って電場 $\mathbf{E}$ が生成され、一周での起電力は 閉路 $\mathcal{L}$ に関する線積分 $\int_{\mathcal{L}} \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ となる (Faraday の電磁誘導)。



これに関して、熱力学で使う形で少し復習しておく。

まず向きのついた経路 C は XY 平面上にあるとする。経路 C 上で定義された滑らかな 2 次元ベクトル関数 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_x(\mathbf{x}), F_y(\mathbf{x}))$ の経路 C に関する線積分をつぎのように定義しよう。

経路には向きがあるので始点の座標を $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$, 始点の座標を $\mathbf{x}_f = (x_f, y_f)$ とする。力学との類似で、経路の上に「質点」があり、「時刻」$s = 0$ で　質点は $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_i$ にいて、「時刻」$s = 1$ で $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f$ にたどりつく、と考える。ただし本当の時間でないので t でなく s とかいた。これを経路のパラメータ s による**パラメータ表示** $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(x))$ という。

パラメータを N $(N \gg 1)$ 個の細かな区間に分け $(s_i = \frac{i}{N},\ 0 \leq i \leq N)$,

$$\Delta \boldsymbol{l}_j = \mathbf{x}(s_{j+1}) - \mathbf{x}(s_j)$$

とする。

$\Delta \boldsymbol{l}_j$ は 2 次元ベクトルだから、内積 $\mathbf{F}(\mathbf{x}(s_j)) \cdot \Delta \boldsymbol{l}_j$ を考えることができる。そこで

定義 0.3 (線積分)**.** $\mathbf{F}$ の経路 C に関する線積分を次の極限とする。

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{l} := \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(s_j)) \cdot \Delta \boldsymbol{l}_j$$

これはつぎのようにも表せる。定義より

$$\Delta \boldsymbol{l}_j = \frac{\mathbf{x}(s_{j+1}) - \mathbf{x}(s_j)}{s_{j+1} - s_j}(s_{j+1} - s_j) = \mathbf{v}_j \Delta s_j$$

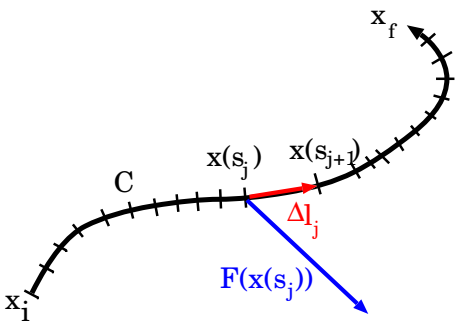


図 2

ただし $\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{x}(s_{j+1})-\mathbf{x}(s_j)}{s_{j+1}-s_j}, \Delta s_j = s_{j+1} - s_j$ とした。$N \to \infty$ で　$\mathbf{v}_j \to \frac{d\mathbf{x}}{ds}$, $\Delta s_j \to ds$ となるから

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} ds$$

例 1. $\mathbf{F} = (-y, x)$ を半径 1 の円周 $\mathcal{C}$ について線積分する。

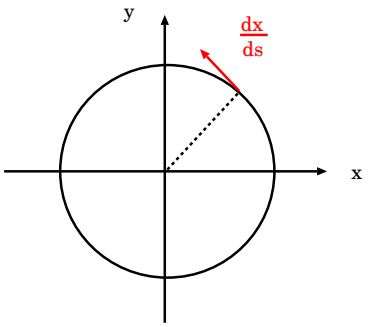


図 3

半径 1 の円周のパラメータ表示は $(x, y) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)\ (0 \leq s \leq 1)$ とすれば良いので

$$\mathbf{F} = (-\sin 2\pi s, \cos 2\pi), \qquad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 2\pi(-\sin 2\pi s, \cos 2\pi s)$$

これらを使えば次となる。

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 (-\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \cdot (2\pi(-\sin 2\pi s, \cos 2\pi s)) = 2\pi \int_0^1 ds = 2\pi$$

もちろん複雑な形の経路に対する難しい関数の積分を実行するのは大変である。この授

業ではそのような場合は扱わない。　上の定義からすぐにわかる次の 2 つの性質はよく使う。

線績分のよく使う性質

1. 線績分は経路上の任意の点で分割できる

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathbf{B}}^{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

2. 始点と終点をひっくり返して逆向きの経路にすると線績分には負号がつく。

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

性質 1 の例. 経路 C を図 4 のように $(0,0)$ から出発して y 軸上に $(0,1)$ に到達したら今度は直角に曲がって x 軸に平行に $(1,1)$ に至る経路として $\mathbf{F}=(y,x)$ を線積分する。

$\mathcal{C}$ を 2 分割して, $(0,0)\to(0,1)$ の部分を $\mathcal{C}_1$, $(0,1)\to(1,1)$ の部分を $\mathcal{C}_2$ とよぶ。これを

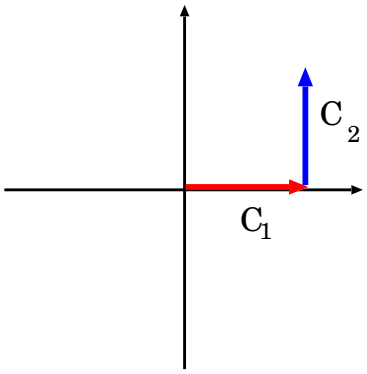


図 4

$\mathcal{C}=\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2$ とあらわす。そこで

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$\mathcal{C}_1$ の部分では y 方向にしか変位がないので $d\boldsymbol{l}=(0,dy)$, $\mathcal{C}_2$ の部分では x 方向にしか変位がないので $d\boldsymbol{l}=(dx,0)$ としてしまってよい。そこで

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 x dy$$

となるが $\mathcal{C}_1$ 上で $x=0$ なので、この積分はゼロになる。

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^1 y dx$$

であるが $\mathcal{C}_2$ 上で $y=1$ なので積分は 1 になる。よって $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l} = 1$

上のように $\mathbf{F}$ をいちいち考えなくても、初めから任意の関数 $A(x,y), B(x,y)$ に対して

$$I = \int_{\mathcal{C}} \Big(A(x,y)dx + B(x,y)dy \Big)$$

を考えても良い。任意の曲線に対して dx, dy ってなんだろうか？と気になるが曲線のパラメータ表示 $\mathbf{x} = (x(s), y(s))$ を用いた

$$I = \int \Big(A(x(s),y(s))\frac{dx}{ds} + B(x(s),y(s))\frac{dy}{ds} \Big) ds$$

のことを形式的に上のように書いているだけである。

もちろん 2 次元曲線に話を限らなくてもたとえば 3 次元中の曲線上で

$$I = \int \Big(Ady + Bdy + Cdz \Big)$$

を考えることもパラメータ表示 $\mathbf{x} = (x(s), y(s), z(s))$ を用いて同様に可能である (曲線はかならずはじから測った長さに相当する s で parameter 表示できる)。

ここで見た様に線積分の値は経路をすこし変えると変わってしまうので取り扱いは難しい。そこで経路をすこし変えても積分値が変わらないような場合を考えたくなる。もちろんそのためには条件が必要になる。つぎのセクションではその条件について考える。

0.3.3 全微分

やはり独立変数が x, y の 2 つである場合を考える。(x,y) で f である量が $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ で $f+\Delta f$ になるとしよう。$|\Delta x|, |\Delta y|$ が十分小さい時は $|\Delta f|$ も十分小さくつぎのように書けると考えて良いだろう。

$$\Delta f = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$$

定義 0.4 (全微分)**.** 次の条件（積分可能条件とも言う）

$$\Big(\frac{\partial A}{\partial y}\Big)_x = \Big(\frac{\partial B}{\partial x}\Big)_y \tag{0.5}$$

が成立するとき $\Delta x, \Delta y, \Delta f \to 0$ の極限をとって

$$df = Adx + Bdy$$

とかき、df を**全微分**という。

またこのときは $A = \frac{\partial f}{\partial x}, B = \frac{\partial f}{\partial y}$ である。

df が全微分である時は (x, y) に対して（積分定数を除いて）一意に f の値がきまる。これには前のセクションでやったように、ある経路に関する線積分

$$f = \int_C df = \int_C \big(Adx + Bdy\big)$$

を考えれば良い。今から示す様に、df が全微分である時は線積分は経路に依存しない。

例：

$$1.df = ydx + xdy \to f = xy + \text{積分定数}$$

$$2.df = (x^2 + y^2)dx + 2xydy \to f = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \text{積分定数}$$

df が全微分である時は線積分は経路に依存しないことを示そう。

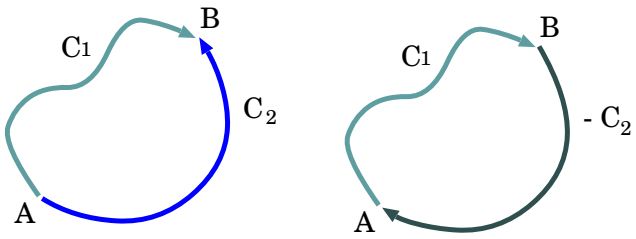


図 5

図 5 の様に A から B に至る任意の 2 つの経路 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を考えそれぞれの積分値を I_1, I_2 とする。$\mathcal{C}_2$ の向きをひっくり返したものを $-\mathcal{C}_2$ と書くと $\mathcal{C}_1 + (-\mathcal{C}_2)$ は閉路 $\mathcal{L}$ になる。$-\mathcal{C}_2$ での積分値は $-I_2$ になるので $\mathcal{L}$ に関する積分は $I_1 - I_2$ となる。よって $\mathcal{L}$ に関する積分がゼロなら $I_1 = I_2$ である。そこで $\mathbf{E} = (A, B, 0)$, $d\boldsymbol{\ell} = (dx, dy, 0)$ として次の積分を考える。

$$I = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

電磁気で習った様に**ストークスの定理**を用いれば、I は次に等しい

$$I = \int_S (\mathrm{rot}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_z dxdy$$