熱力学演習問題 その１ ver2026/11/9

問題１

物体１と物体２を断熱材で覆い、接触させて十分時間が経つと熱平衡に達する。熱平衡に達するまで物体１も物体２も体積変化はない。物体 1,2 の定積比熱をそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1)接触前の物体 1,2 の温度をそれぞれ T_1, T_2 とする。C_1, C_2 が定数である場合、熱平衡での温度 T_f を求めよ。

(2)$C_1 = C_2 = C_0 \mathrm{e}^{-aT}$ の場合 T_f をもとめよ。ただし C_0, a は定数

単原子分子 N_A 個よりなる理想気体 A と２原子分子 N_B 個よりよりなる理想気体 B がひとつのシリンダー（体積 V) に密閉されている。シリンダーは熱を通すピストンで２つに仕切られている。　はじめ気体 A は温度 T_1, 気体 B は温度 T_2 で（ただし $T_1 > T_2$) ピストンは固定されていた。

(3)シリンダー全体を断熱材で覆ってピストンの固定をはずし十分時間がたった後の A, B の圧力 P を求めよ。ただし単原子（２原子）分子理想気体の比熱は一分子あたり $\frac{3}{2}k_B(\frac{5}{2}k_B)$ であることを利用せよ。

問題 2 ある気体は次の状態方程式と内部エネルギー U をもつ ($a, b, c, d > 0$ は定数)

$$\Big(P + a\big(\frac{N}{V}\big)^2\Big)(V - Nb) = Nk_BT, \qquad U = cT - d\frac{N^2}{V}$$

(1)$d'Q = dU + PdV$ は全微分ではないことを証明せよ。

(2)$dS = \frac{d'Q}{T}$ で定義される dS が全微分であるため a, b, c, d の間に成立すべき式を求めよ。以下この関係式を使い a のみ用いよ。

(3)気体の状態を $(T_0, V_0) \xrightarrow{\text{等温}} (T_0, V_1) \xrightarrow{\text{等積}} (T_1, V_1)$ と準静的に変化させる。ただし $T_0 < T_1, V_0 < V_1$ で $V - Nb > 0$ はいつでも成り立っているとする。このときの気体の内部エネルギーの変化を求めよ。

(4)上の変化で気体が外部にした仕事 $\Delta' W$ を求めよ。

(5)気体の状態を $(T_0, V_0) \xrightarrow{\text{等積}} (T_1, V_0) \xrightarrow{\text{等温}} (T_1, V_1)$ と準静的に変化させるときに気体が外部にした仕事 $\Delta' W'$ を求めよ。

問題 3 一本のゴムバンドを多数の分子（高分子）からなる熱力学的な系であると考える。ゴムバンドの張力を σ とする。σ　には次が成り立つ。

$$\big(\frac{\partial\sigma}{\partial L}\big)_T = a\frac{T}{T_0}\Big(1 + 2\big(\frac{L_0}{L}\big)^3\Big) \qquad \big(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\big)_L = a\frac{T}{T_0}\Big(1 - \big(\frac{L_0}{L}\big)^3\Big)$$

ただし L_0 は張力がゼロのときのゴムの長さである。

(1)張力を一定に保ったまま、温度を ΔT だけあげたときのゴムの長さの変化 ΔL を求めよ。

(2)$d\sigma$ が全微分であることを示せ。適当な経路で積分して温度 T で長さ L のときのゴムの張力をもとめよ。

(3) ゴムの内部エネルギーは長さに依存せず、長さを一定にしたときの比熱を C_L とする。準静断熱的にゴムを $2L_0$ まで伸ばしたときの温度変化 ΔT を求めよ。

問題 4　N 個の分子よりなる理想気体が密閉されたシリンダーからなる系を用いたカル

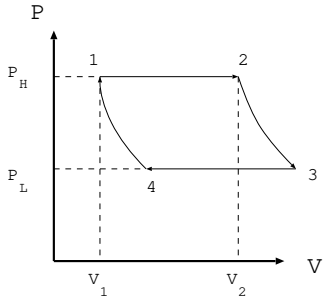


図 1　問題 4 図

ノーとは異なるサイクル (ジュールサイクル) を考える。ただし過程 $1 \to 2$ は $P = P_H$ である等圧膨張、過程 $2 \to 3$ は断熱膨張、過程 $3 \to 4$ は $P = P_L$ である等圧圧縮, 過程 $4 \to 1$ は断熱圧縮である (すべて準静的)。定圧比熱 $C_P = C_V + Nk_B = \frac{5}{2}Nk_B$ を用いて以下の問題に答えよ。

(1)状態 3,4 での体積 V_3, V_4 を V_1, V_2 および P_H, P_L を用いて表せ。ただし断熱過程の理想気体で $PV^\gamma =$ 定数を用いて良い。$(\gamma = \frac{C_P}{C_V})$

(2)過程 $1 \to 2$ で系が外部に行う仕事 $W_{1\to2}$, 内部エネルギーの変化 $U_{1\to2}$、および系に流入する熱量 $Q_{\rm in}$ を V_1, V_2 および P_H を用いて求めよ。

(3)過程 $2 \to 3$ で系が外部に行う仕事 $W_{2\to3}$ を V_2 および P_L, P_H を用いて求めよ。

(4)過程 $3 \to 4$ で系が外部に行う仕事 $W_{3\to4}$, 内部エネルギーの変化 $U_{3\to4}$、および系から流出する熱量 $Q_{\rm out}$ を V_1, V_2 および P_L を用いて求めよ。

(5)過程 $4 \to 1$ で系が外部に行う仕事 $W_{4\to1}$ を V_1 および P_L, P_H を用いて求めよ。

(6)ジュールサイクルの効率を P_L, P_H を用いて表せ。

問 5　図のように断熱材でできたシリンダーとピストンを用意し、箱を多孔質の壁 C で

２つにわける。最初、左側の A の部分に N 個の気体分子全部が内部エネルギー U_1, 圧力 P_1, 体積 V_1 の状態にある。左側のピストンをゆっくり押すと多孔質の壁の中を分子が通過し、B の方に気体分子が移動していく。この際左側の小部屋の圧力を P_1, 右側の小箱の圧力を P_2 に保つようにする ($P_1 > P_2$)。最終的に B の方にすべての気体分子が移動した。このとき気体分子は内部エネルギー U_2, 圧力 P_2, 体積 V_2 の状態にある。

（1）断熱過程であることに注意して、始めと終わりで、気体のエンタルピー H が等しいことを示せ。ただし $H = U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2$.

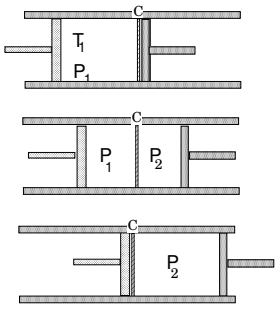


図 2　問題 5 図

（2）シリンダーの中には理想気体がはいっており、上の操作のはじめと終わりで温度が等しかったとする。（１）の結果を利用して理想気体の内部エネルギーに成り立つ性質を述べよ。

（3）(理想気体とは限らず) 定圧比熱 C_P は $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ であたえられることを示せ。 とくに理想気体ではマイヤーの関係 $C_P - C_V = Nk_B$ が成立する事を示せ。

問題 6

（1）温度の異なる物体 A,B をくっつけると高い方から低い方の物質へ熱伝導が起こる。熱伝導は不可逆過程である事を示せ。

（2）まさつによる熱の発生は不可逆過程である事を示せ。

（3）カルノーサイクル C では、高温源から熱を得た熱機関が、外に仕事をして低温源に熱を排出する。この外にする仕事はかならず正であることを示せ。ただし外からされた仕事をすべて熱源に熱としてわたす機関 B は存在するとする。

略解

問題 1 (1) $C_1(T_f - T_1) + C_2(T_f - T_2) = 0$ より $T_f = \frac{C_1T_1+C_2T_2}{C_1+C_2}$。(2) $T_f = \frac{1}{a}\log\frac{2}{\mathrm{e}^{-aT_1}+\mathrm{e}^{-aT_2}}$ (3)(1) を利用すれば $T_f = \frac{3N_AT_1+5N_BT_2}{3N_A+5N_B}$。全系で圧力は P は等しくなるので状態方程式より $P = \frac{(N_A+N_B)}{V}k_BT_f = k_B\frac{(N_A+N_B}{V}\frac{3N_AT_1+5N_BT_2}{3N_A+5N_B}$

問題 2 (1) 省略 (2)$a = d$(3)U は状態量なので始状態と終状態のみできまる。$\Delta U = C(T_1 - T_0) - a(\frac{N^2}{V_1} - \frac{N^2}{V_0})$。(4) $\Delta'W = \int_{V_0}^{V_1} PdV = Nk_BT_0\log\frac{V_1-Nb}{V_0-Nb} + aN^2(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2})$ (5) (4) で T_0 を T_1 にすればよい。よって $\Delta'W \neq \Delta'W'$。

問題 3 (1)$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\sigma = \frac{\partial(L,\sigma)}{\partial(T,\sigma)} = -\frac{(\frac{\partial\sigma}{\partial T})_L}{(\frac{\partial\sigma}{\partial L})_T}$ を用いて $\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\sigma = -\frac{L}{T}\frac{1-\left(\frac{L_0}{L}\right)^3}{1+2\left(\frac{L_0}{L}\right)^3}$ (2) 適当な経路で積分することによって $\sigma = aT\left(\frac{L}{L_0} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2\right)$ (3)$dW_{\mathrm{in}} = \sigma\Delta L$ なので $d'Q = 0 = C_LdT - \sigma dL$ これを積分して $\Delta T = \frac{aTL_0}{C_L}$

問題 4 (1)$V_3 = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{3/5}V_2, V_4 = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{3/5}V_1$。
(2)$W_{1\to2} = P_H(V_2 - V_1)$,$U_{1\to2} = \frac{C_V}{Nk_B}P_H(V_2 - V_1) = \frac{3}{2}P_H(V_2 - V_1)$, $Q_{\mathrm{in}} = \frac{5}{2}P_H(V_2 - V_1)$
(3) 断熱過程に成立する PV^γ 一定を用いて、$W_{2\to3} = \int_{V_2}^{V_3} PdV = P_HV_2^\gamma\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V^\gamma}$。これを計算すると $W_{2\to3} = \frac{3P_HV_2}{2}\left(1 - \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{2/5}\right)$。
(4) $W_{3\to4} = P_L(V_4-V_3) = P_L^{2/5}P_H^{3/5}(V_1-V_2)$, $U_{3\to4} = C_V(T_4-T_3) = \frac{C_VP_L}{Nk_B}(V_4-V_3) = \frac{3}{2}P_L^{2/5}P_H^{3/5}(V_1 - V_2)$, $Q_{\mathrm{out}} = -W_{3\to4} - U_{3\to4} = \frac{5}{2}P_L^{2/5}P_H^{3/5}(V_2 - V_1)$。
(5)$W_{2\to3}$ と同様に計算して $W_{4\to1} = \frac{3P_HV_1}{2}\left(\left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{2/5} - 1\right)$
(6) 定義より $\eta = \frac{W_{1\to2}+W_{2\to3}+W_{3\to4}+W_{4\to1}}{Q_{\mathrm{in}}} = 1 - \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{2/5}$

問題 5 (1) 体積 V_1 の部分に関して $\Delta Q_1 = \Delta U + P_1\Delta V = -U_1 - P_1V_1$, 体積 V_2 の部分に関して $\Delta Q_2 = \Delta U + P_2\Delta V = U_2 + P_1V_2$。断熱なので $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0$。これより $H = U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_1V_2$。
(2) 等温で行ったので $P_1V_1 = Nk_BT = P_2V_2$ よって $U_1 = U_2$。$V_1 \neq V_2$ なので、内部エネルギーが体積に依存しないことを示している。
(3) 定義より $C_P = \left(\frac{\partial' Q}{\partial T}\right)_P = C_V + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ だが (2) より $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ なの

で状態方程式を用いて $C_P = C_V + Nk_B$。

問題 6 (1) 可逆だとすると、逆過程では低温熱源から高温熱源に他になんの変化も残さず熱が移動することになり　クラウジウスの原理に反する。(2)(1) 同様逆過程が可能だとすると今度はケルビンの原理に反する。(なぜか？各自考えよ)。(3) 仕事 W が負であるとする。カルノーサイクルは可逆なので、逆機関 C' を考えると、それは低温源から Q_L の熱をうけ、外に $|W|$ の仕事をして高温源に Q_H の熱をはきだす。ここで熱力学第 1 法則より $Q'_L = |W| + Q_H > |W|$ である。熱機関 B は外から $|W|$ を仕事をうけ、それを低温源にそのまま与えるとする。逆機関 C' と B を組み合わせると低温源から $Q_L - |W| > 0$ の熱をうけ、それをそのまま高温源にわたす機関が可能となりこれはクラウジウスの原理に反する。