博士論文

# 有限サイズ行列による曲がった時空の記述

2026 年　6 月

静岡大学

大学院自然科学系教育部

情報科学専攻

服部　圭一郎

## 概要

行列模型が重力を含んだ理論であるためには、曲がった時空が記述できる必要がある。そこで行列の共変微分解釈は非常に有用である。しかし素朴な解釈の下では、共変微分に対応する行列のサイズが無限大となり、具体的な量子論の計算を行うことができない。本論文では Berezin-Toeplitz 量子化を用いて、共変微分を有限サイズの行列に正則化する。

# 目次


1 序論 2

1.1 研究の背景と目的 . . . . . 2

1.2 本論文の構成 . . . . . 3

2 行列の共変微分解釈 5

2.1 ナイーブな解釈 . . . . . 5

2.2 正則表現 . . . . . 6

2.3 行列の共変微分解釈 . . . . . 8

2.4 具体例: $S^2$ と $T^2$ . . . . . 10

2.5 行列模型への応用 (アインシュタイン方程式) . . . . . 12

3 Berezin-Toeplitz 量子化 14

3.1 Berezin-Toeplitz 演算子 . . . . . 14

3.2 Berezin-Toeplitz 演算子の漸近的性質 . . . . . 18

4 共変微分の有限サイズ行列正則化 23

4.1 共変微分の有限サイズ行列への正則化 . . . . . 23

4.2 共変微分の有限サイズ行列への正則化

($T(\varphi)$ を正方行列に正則化する場合) . . . . . 33

4.3 2 次元 ($n = 1$) の場合 . . . . . 37

4.4 具体例: $S^2$ . . . . . 41

4.5 具体例: $T^{2n}$ . . . . . 44

5 結論と展望 50

付録 A $[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ の評価 52

# 1 序論

## 1.1 研究の背景と目的

現在自然界には 4 個の相互作用が存在している。それらはそれぞれ強い相互作用、弱い相互作用、電磁気相互作用、重力相互作用である。これら 4 個の相互作用の内、重力以外の 3 個の相互作用については、標準模型と呼ばれる、場の量子論により記述される。しかし重力量子論はまだ完成しておらず、現在その有力候補は超弦理論である。超弦理論は摂動論的には定式化されている。しかし、摂動論では理論の許す真空が多数存在し、一意に定まらない。また宇宙の始まりにおいて、特異点を摂動論では解消することができない。これらの背景から、超弦理論を非摂動的に定式化することが重要な課題となっている。この非摂動的定式化の有力候補の一つとして行列模型が挙げられる [1, 2]。

行列模型では重力相互作用を含む、超弦理論の非摂動的定式化を考える上で、重要な時空の創発を見ることができる。具体的な模型として IIB 行列模型が提唱されている。(特に最近の研究については [3–27] を参照されたい)

$$S = -\frac{1}{g^2} Tr \left( \frac{1}{4}[A_a, A_b][A^a, A^b] + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^a [A_a, \psi] \right) \tag{1.1}$$

$A_a (a = 1, \cdots, 10)$ はそれぞれ $N \times N$ のエルミート行列、$\Gamma^a$ は 10 次元のガンマ行列、$\psi$ は 10 次元のマヨラナワイルスピノールである。添え字の $a, b$ については局所ローレンツ変換により変換される添え字であり、平坦計量 $\delta_{ab}$ によって縮約されている。この模型は 10 次元の $U(N)$ 超対称ヤン・ミルズ理論を 0 次元に次元還元したものになっている。このように行列模型においては時空はアプリオリには存在せず、行列が持つ自由度からダイナミカルに時空が創発する。この模型の中に存在する行列 $A_a$ に対する解釈は様々であり、それぞれの解釈に応じた時空の創発を見ることができる。その中でこの論文では行列の共変微分解釈 [28] に注目する。なぜならこの IIB 行列模型は重力を含んだ理論であり、共変微分は幾何の情報を含むため、このような解釈により曲がった時空を自然に表現できるためである。

しかし、この解釈には問題点が一つある。それは行列を共変微分として解釈すると、共変微分は微分演算子のため、行列のサイズが無限大になってしまい、具体的な量子補正の計算などを行うことができなくなることである。この問題を克服するためには、正則化が必要である。この正則化には、様々な手法があり得るが、本論文では共変微分を有限サイズの行列として構成する正則化を与えることを目的とする。共変微分を有限サイズ行列に正則化することにより、特に行列模型の数値シミュレーションの計算結果への応用が期待される。[3–5, 29, 30] 具体的には $2n$ 次元 Kähler 多様体上の場に作用する共変微分を、有限サイズの行列に正則化する。この正則化には Berezin-Toeplitz(BT) 量子化と呼ばれる方法を利

用する。[31,32]BT 量子化とは、ある多様体上の関数を、有限サイズの行列に正則化する方法である。また具体例として、2 次元球面 $S^2$ と $2n$ 次元トーラス $T^{2n}$ に対して、この正則化を行い、行列のサイズが無限大となる極限において、行列の共変微分解釈の結果を再現することを見る。

## 1.2 本論文の構成

まず 2 章で行列の共変微分解釈 [28] についてレビューする。行列を素朴に共変微分として解釈すると、(1.1) の $A_a$ を $A_a = -i\nabla_a$ と解釈すれば良さそうに思える。しかしこの解釈では大きく 2 つの問題が生じる。2.1 節ではこの問題点について述べる。そのため共変微分が作用する空間を上手く工夫する必要がある。この空間として、局所ローレンツ群の正則表現を、2.2 節で導入する。この正則表現は行列を共変微分として解釈する上で、非常に便利な性質を持っている。また 2.3 節では、前節で導入した正則表現を用いて、実際に行列を共変微分として解釈する。次に 2.4 節で具体例として、2 次元球面 $S^2$ と 2 次元トーラス $T^2$ の場合を考え、どのように共変微分解釈が与えられるかを見る。最後に 2.5 節で、この共変微分解釈の応用例について述べる。具体的にはこの共変微分解釈を IIB 行列模型に適応することで、アインシュタイン方程式が得られることを見る。

3 章では Berezin-Toeplitz(BT) 量子化についてレビューする [33]。本論文では $2n$ 次元の K$\ddot{a}$hler 多様体 $M$ を考え、$M$ 上の関数 (場) が、どのようにして行列へ正則化されるのかを見る。BT 量子化では $M$ 上のディラック方程式のゼロモードが重要な役割を果たす。BT 量子化によって得られる行列を Toeplitz 演算子と呼ぶ。まず 3.1 節で Toeplitz 演算子の定義を与える。また Atiyah-Singer の指数定理と消滅定理を用いることで、Toeplitz 演算子が有限サイズの行列になることを示す。また Toeplitz 演算子はそのサイズが無限大となる極限において、いくつか望ましい性質を持つ。この Toeplitz 演算子の漸近的性質について、3.2 節で述べる。この性質は本論文の主題である共変微分を有限サイズの行列に正則化する上で、非常に重要な役割を果たす。

4 章では 3 章でレビューした BT 量子化を用いて、$M$ 上の関数に作用する共変微分を、有限サイズの行列に正則化する [34]。この正則化では 2 章で導入した正則表現と、Toeplitz 演算子の漸近的性質が非常に重要な役割を果たす。まず 4.1 節では、どのようにして共変微分に対する、有限サイズの行列が得られるのかについて述べる。ここでの正則化では、$M$ 上の場 $\varphi$ に対する Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ は、長方形行列として得られる。しかし、共変微分の行列正則化を考える上では、正方行列として $T(\varphi)$ が得られた方が、有用な場合も考えられる。4.2 節では、局所ローレンツ群の座標を上手く選ぶことによって、正方行列として $T(\varphi)$ を得る方法について述べる。4.3 節では、簡単な例として $n = 1$、つまり $M$ が 2 次元の多様体の場合について述べる [16]。最後に、ここで得られた共変微分の行列正則化の具体例とし

て、2 次元球面 $S^2$ と $2n$ 次元トーラス $T^{2n}$ について、4.4 節と 4.5 節でそれぞれ具体的に共変微分の行列正則化を構成する。そして行列のサイズが無限大となる極限において、2 章で見た行列の共変微分解釈による結果を、それぞれ再現することを見る。

5 章では主に 4 章で行った共変微分の有限サイズ行列への正則化について、その結論と今後の展望について述べる。

# 2　行列の共変微分解釈

この章では行列模型における行列の共変微分解釈についてレビューする。行列を共変微分として解釈することを素朴に考えると、$A_a = -i\nabla_a$ とすれば良いように思える。しかしこの解釈では大きく 2 つの問題が生じる。2.1 節でこの問題点について述べる。またこの問題を解決するために、2.2 節で共変微分が作用する空間として、正則表現を導入する。そして 2.3 節で実際にこの正則表現を用いて行列を共変微分として解釈される過程を述べ、最具体例として 2 次元球面 $S^2$ と、2 次元トーラス $T^2$ 場合について 2.4 節で述べる。最後に行列模型への応用として、この解釈により、IIB 行列模型の運動方程式から、アインシュタイン方程式が得られることについて述べる。

## 2.1　ナイーブな解釈

まず平坦な空間の場合に行列がどのようにして運動量、すなわち微分として解釈されるかについて述べる。準備として平らな 10 次元の空間 $\mathbb{R}^{10}$ 上の関数の空間 $W$ を考える。そして十分にサイズの大きい行列をこの関数空間 $W$ から $W$ への線形写像とみなす。すると以下の式のように行列を積分核として考えることができ、微分展開することができる。

$$\begin{aligned} f(x) &\to \int d^{10}y K(x,y) f(y) \\ &\simeq \left(b(x) + b^{\mu}(x)\partial_{\mu} + b^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + \cdots\right) f(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

このようにして行列を自然に微分演算子として解釈することができる。また添え字の $\mu, \nu$ は時空の添え字であるが、平らな時空を考えている場合は計量を用いて局所ローレンツ変換により変換される添え字 $a, b$ に変換することができる。

$$A_a = -i\delta_a^{\mu}\partial_{\mu} \tag{2.2}$$

ここで重力の効果を加え、曲がった時空においてこの解釈がどのように拡張されるかについて考察する。共変微分は以下のような形で与えられる。

$$\nabla_a = e_a^{\mu}(x)\left(\partial_{\mu} + \frac{1}{2}\omega_{\mu}^{bc}(x)\mathcal{O}_{bc}\right) \tag{2.3}$$

$e_a^{\mu}(x)$ は多脚場、$\omega_{\mu}^{bc}(x)$ はスピン接続、$\mathcal{O}_{bc}$ は局所ローレンツ変換の生成子である。今までの議論から素朴に考えると、(2.2) と (2.3) 式から $A_a = -i\nabla_a$ とすれば良さそうである。しかしこのように解釈すると以下の 2 点の問題が生じる。まず 1 点目は、多様体上の異なる座標パッチの接続条件を考えると、局所ローレンツ変換に対して共変微分の添え字 $a$ がベクトルのように変換されてしまう。つまり曲がった多様体上においては共変微分はグローバル

に定義されていないのである。2 点目はこの解釈の下で、行列の積を考えると見えてくる。この解釈の下で $A_1$ と $A_2$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= -\nabla_1 \nabla_2 \\ &= -e_1^\mu \partial_\mu \nabla_2 - e_1^\mu \omega_\mu^{bc} \mathcal{O}_{bc} \nabla_2 \\ &= -\partial_1 \nabla_2 - \omega_1^{2c} \nabla_c \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここでこの式の 2 項目に着目すると局所ローレンツ変換の添え字 $c$ で縮約が取られている。つまり $A_1$ と $A_2$ の積が $A_1$ と $A_2$ で閉じていないのである。これは共変微分の中の局所ローレンツ変換の生成子 $\mathcal{O}_{bc}$ が $\nabla_2$ の局所ローレンツ変換の足に作用することで現れる効果である。

以上の 2 点の理由から、曲がった空間において行列を素朴に共変微分と解釈することはできず、共変微分が作用する空間を上手く工夫する必要がある。次節でこのような空間として正則表現空間を考え、ここで述べた 2 点の問題が解決されることを見る。

## 2.2 正則表現

この節では行列を共変微分として解釈するために、正則表現を導入する。正則表現の空間を $V_{reg}$ と書くと、$V_{reg}$ は以下のように与えられる。

$$V_{reg} = \{f : G \to \mathbb{C}\} \tag{2.5}$$

ここで $G$ はある群を表す。つまり正則表現の空間は群 $G$ から $\mathbb{C}$ への写像の空間である。ここで $G$ の正則表現への作用 $h$ は以下のように与えられる。

$$(\hat{h}f)(g) = f(h^{-1}g) \tag{2.6}$$

また正則表現には、以下のような 2 つの重要な性質がある。まず 1 点目は Peter-Weyl の定理によって、以下のように既約分解することができる点である。

$$V_{reg} = \bigoplus_r (\underbrace{V_r \oplus \cdots \oplus V_r}_{d_r}) \tag{2.7}$$

ここで添え字 $r$ は群 $G$ の既約表現を表し、$V_r$ は表現 $r$ の表現空間、$d_r$ は表現 $r$ の次元である。さらに 2 点目の性質はこの $V_r$ と $V_{reg}$ に対して以下のような同型構造がある点である。

$$V_r \otimes V_{reg} \simeq \underbrace{V_{reg} \oplus \cdots \oplus V_{reg}}_{d_r} \tag{2.8}$$

これら 2 つの性質は行列を共変微分として解釈する上で、非常に重要な性質である。

この 2 つの性質についてより詳しく見ていく。まずは (2.7) 式について考えると、任意の $f \in V_{reg}$ は以下のように展開できる。

$$f(g) = \sum_{r:irr} \tilde{f}_{ij}^{\langle r \rangle} \sqrt{d_r} R_{ij}^{\langle r^* \rangle}(g) \tag{2.9}$$

$R_{ij}^{\langle r^* \rangle}(g)$ は $g \in G$ の既約表現 $r$ の複素表現の表現行列であり、和については群 $G$ についてのすべての既約表現について和が取られている。この展開は以下のように表現行列 $R_{ij}^{\langle r^* \rangle}(g)$ が正規直交関係を持つことに基づいている。

$$\int dg R_{ij}^{\langle r \rangle}(g)^* R_{kl}^{\langle r' \rangle}(g) = \frac{1}{d_r} \delta^{\langle r \rangle \langle r' \rangle} \delta_{ik} \delta_{jl} \tag{2.10}$$

(2.9),(2.10) 式により、(2.6) 式により与えられた群の作用 $h \in G$ により、$\tilde{f}_{ij}^{\langle r \rangle}$ が以下のように変換されることが分かる。

$$\tilde{f}_{ij}^{\langle r \rangle} \to R_{ik}^{\langle r \rangle}(h) \tilde{f}_{kj}^{\langle r \rangle} \tag{2.11}$$

つまり群の作用 $h \in G$ によって $\tilde{f}_{ij}$ の添え字 $i$ は変換されるが、添え字 $j$ は変換されないことが分かる。よって、正則表現は (2.7) 式のような既約分解が可能なのである。次に (2.8) 式の同型構造に注目する。$\Phi^i(g)$ を $V_r \otimes V_{reg}$ の要素、つまり $\Phi^i(g) \in V_r \otimes V_{reg}$ とすると、群の作用 $h$ は $\Phi^i(g)$ に対して以下のように作用する。

$$(\hat{h}\Phi^i)(g) = R^i{}_j^{\langle r \rangle}(h) \Phi^j(h^{-1}g) \tag{2.12}$$

一方、$\Phi^{(i)}(g)$ を、

$$\Phi^{(i)}(g) = R^{(i)}{}_j(g^{-1}) \Phi^j(g), \tag{2.13}$$

と定義したとき、$\Phi^{(i)}(g) \in V_{reg} \oplus \cdots \oplus V_{reg}$ であることを以下で示す。これにより (2.8) 式の同型構造が成り立つことが分かる。実際、群の作用 $h$ を $\Phi^{(i)}(g)$ に作用させてみると、

$$\begin{aligned}
(\hat{h}\Phi^{(i)})(g) &= R^{(i)}{}_j(g^{-1}) (\hat{h}\Phi^j)(g) \\
&= R^{(i)}{}_j(g^{-1}) R^j{}_k(h) \Phi^k(h^{-1}g) \\
&= \Phi^{(i)}(h^{-1}g)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

となる。ここで、3 行目の等号については表現行列の性質により、

$$\begin{aligned}
R^{(i)}{}_j(g^{-1}) R^j{}_k(h) &= R^{(i)}{}_k(g^{-1}h) \\
&= R^{(i)}{}_k((h^{-1}g)^{-1})
\end{aligned}$$

となることを用いている。以上が、群の正則表現についてのレビューである。

行列を共変微分と解釈するための準備の最後として、多様体とファイバー束について述べる。多様体 $M$ は座標パッチの貼り合わせにより定義される。つまり、$i$ 番目の座標パッチを

$U_i$ とすると、$M = \bigcup_i U_i$ と書ける。さらに構造群を $G$ とし、ファイバーを $V_{reg}$ とするファイバー束を $E_{reg}$ とする。さらに、$\Gamma(E_{reg})$ をファイバー束 $E_{reg}$ の切断の集合とする。このとき多様体上の座標は時空の座標 $x$ と群の座標 $g$ の組 $(x, g)$ で指定され、$f(x, g) \in \Gamma(E_{reg})$ は各パッチで指定されるため $i$ 番目のパッチにおける $f(x, g)$ を $f^{[i]}(x, g)$ と書く。また $f(x, g)$ は $i$ 番目と $j$ 番目のパッチが重なる領域で以下の接続条件を満たす。

$$f^{[j]}(x, g) = f^{[i]}(x, t_{ij}(x)g) \quad (x \in U_i \cap U_j) \tag{2.15}$$

前節で述べた通りこの接続条件によって、群の座標 $g$ は変換関数 $t_{ij}(x)$ によって変換される。ここで (2.8) 式の同型構造は、ファイバー束にも適用される。つまり、

$$\Gamma(E_r \otimes E_{reg}) \simeq \underbrace{\Gamma(E_{reg}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_{reg})}_{d_r} \tag{2.16}$$

の構造が成り立つ。この同型構造は以下の関係式で表すことができる。

$$f^{[i]}_{(k)}(x, g) = R_{(k)}{}^{l}(g^{-1}) f^{[i]}_{l}(x, g) \tag{2.17}$$

ここで $f^{[i]}_{l}(x, g)$ と $f^{[i]}_{(k)}(x, g)$ はそれぞれ、(2.16) 式の左辺と右辺の要素である。

ここまでで、行列を共変微分として解釈するための準備ができた。次節ではここで導入した正則表現を使って、行列を共変微分として解釈していく。

## 2.3 行列の共変微分解釈

この節では前節で導入した正則表現を使って、行列を共変微分と解釈し、2.1 節で述べた 2 つの問題が解決されることを見る。

行列を共変微分として解釈するためには、共変微分が作用する空間を工夫しなければならない。その空間を前節で見た、$\Gamma(E_{reg})$ に選ぶことができる。以下ではこれを見ていく。共変微分は上で述べたようにグローバルには定義できず、各座標パッチごとに以下のように定義される。

$$\nabla^{[i]}_a = e^{\mu[i]}_a(x) \left( \partial_\mu + \frac{1}{2} \omega^{bc[i]}_\mu(x) \mathcal{O}_{bc} \right) \tag{2.18}$$

$e^{\mu[i]}_a(x)$、$\omega^{bc[i]}_\mu(x)$、$\mathcal{O}_{bc}$ はそれぞれ多脚場、スピン接続、構造群 $G$ の生成子である。i 以下の議論では構造群 $G$ として、$Spin(d)$、もしくは $Spin^c(d)$ を考える。ここで共変微分 $\nabla_a$ の $\Gamma(E_{reg})$ への作用は以下のような写像と考えられる。

$$\nabla_a : \Gamma(E_{reg}) \to \Gamma(T \otimes E_{reg}) \tag{2.19}$$

この式の $T$ は多様体 $M$ の接束である。このように一般的に共変微分は作用することで、作用した空間を変える。ここで (2.19) 式の右辺に対して、(2.16) 式の同型構造を考えると、以

下のように書ける。

$$\Gamma(T \otimes E_{reg}) \simeq \underbrace{\Gamma(E_{reg}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_{reg})}_{d} \tag{2.20}$$

ここで、() 付き添え字を持つ $\nabla_{(a)}$ を考えると、(2.19)、(2.20) 式より $\nabla_{(a)}$ の $\Gamma(E_{reg})$ への作用は

$$\nabla_{(a)} : \Gamma(E_{reg}) \to \underbrace{\Gamma(E_{reg}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_{reg})}_{d} \tag{2.21}$$

となる。つまり $\nabla_{(a)}$ が $\Gamma(E_{reg})$ に作用することで、空間自体は変えず $d$ 個のコピーを生み出すことが分かる。よって $\nabla_{(a)}$ は $\Gamma(E_{reg})$ 上の自己準同型とみなすことができる。このことから 2.1 節で述べた、積構造の問題については、克服されていることが分かる。即ち、この積構造の問題は一方の共変微分の中に含まれるローレンツ生成子が、他方の共変微分を変換してしまうことに起因していたが、() 付きの添え字は、局所ローレンツ変換により変換されない。また、$\nabla_{(a)}$ と $\nabla_a$ の関係は以下のようになっている。

$$\nabla^{[i]}_{(a)} = R_{(a)}{}^{b}(g^{-1}_{[i]})\nabla^{[i]}_{b} \tag{2.22}$$

ここで実際に $\nabla_{(a)}$ のパッチが重なる領域での接続条件を考えてみる。$\nabla_a$ の接続条件は

$$\nabla^{[i]}_{a} = R_{a}{}^{b}(t_{ij}(x))\nabla^{[j]}_{b} \tag{2.23}$$

で与えられる。(2.22) 式と (2.23) 式を用いると

$$\begin{aligned}
\nabla^{[i]}_{(a)} &= R_{(a)}{}^{b}(g^{-1}_{[i]})\nabla^{[i]}_{b} \\
&= R_{(a)}{}^{b}(g^{-1}_{[i]})R_{b}{}^{c}(t_{ij}(x))\nabla^{[j]}_{c} \\
&= R_{(a)}{}^{c}((t^{-1}_{ij}g_{[i]})^{-1})\nabla^{[j]}_{c} \\
&= \nabla^{[j]}_{(a)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

と計算できる。この結果から $\nabla^{[i]}_{(a)}$ は、多様体上でグローバルに定義できることを示しており、1 つ目の問題についても克服された。このようにして共変微分の作用する空間として正則表現を考えることで、無限サイズの行列を共変微分として解釈することができる。

この節の最後に $-i\nabla_{(a)}$ のエルミート性について確認しておく。まず $\Gamma(E_{reg})$ の元 $u, v$ に対して、以下のように内積を定義する。

$$(u, v) = \int e d^d x dg u^{[i]}(x, g)^* v^{[i]}(x, g) \tag{2.25}$$

$e$ は体積要素 $e = dete^{\mu}_{a}$、$dg$ は Haar 測度である。この内積はパッチの選択によらず定義できる。(そのため以下の計算ではパッチを指定する添え字は省略するこの内積を用いると、

$(u_{(a)}, -i\nabla_{(a)}v)$ について以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}(u_{(a)}, i\nabla_{(a)}v) &= \int ed^d x dg u_{(a)}(x,g)^*(-i\nabla_{(a)})v(x,g) \\ &= \int ed^d x dg u_a(x,g)^*(-i\nabla_a)v(x,g) \\ &= \int ed^d x dg(-i\nabla_a u_a(x,g))^* v(x,g) \\ &= \int ed^d x dg(-i\nabla_{(a)} u_{(a)}(x,g))^* v(x,g) \\ &= (-i\nabla_{(a)}u_{(a)}, v) \end{aligned} \tag{2.26}$$

この計算では 2 つの重要な性質を用いている。まず一つ目は $R$ が直交行列のため得られる関係であり、2 行目の等号で

$$\begin{aligned} u_{(a)}(x,g)^*\nabla_{(a)} &= \delta^{(a)(b)} R_{(a)}{}^c(g^{-1}) R_{(b)}{}^d(g^{-1}) u_c(x,g)\nabla_d \\ &= u_c(x,g)\nabla_c \end{aligned} \tag{2.27}$$

のように計算した。そして 4 行目の等号で以下のように計算している。

$$\begin{aligned} \nabla^{(a)} u_{(a)}(x,g) &= \delta^{(a)(b)}\nabla_{(a)} u_{(b)}(x,g) \\ &= \delta^{(a)(b)} R_{(b)}{}^d(g^{-1})\nabla_{(a)} u_d(x,g) \\ &= \delta^{(a)(b)} R_{(b)}{}^d(g^{-1}) R_{(a)}{}^c(g^{-1})\nabla_c u_d(x,g) \\ &= \nabla^c u_c(x,g) \end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.26) 式において $u_{(1)} = u, u_{(2)} = \cdots = u_{(d)} = 0$ のようにしていけば $-i\nabla_{(a)}$ の各成分がエルミートであることを、示していくことができる。

次節では具体的に曲がった空間の最も簡単な例として $S^2$ と $T^2$ の場合に、この解釈がどのように表現されるのかを見ていく。

## 2.4 具体例: $S^2$ と $T^2$

この節では前節までで構成してきた共変微分解釈を、具体的に 2 次元球面 $S^2$ と 2 次元トーラス $T^2$ の場合に考えていく。

構造群 $G$ として $Spin(2) \simeq U(1)$ を考えるとその表現行列 $R$ は以下のように与えられる。

$$R^{\langle s\rangle}(\theta) = e^{2is\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi)) \tag{2.29}$$

$s$ は整数か半整数をとるチャージであり、このチャージにより表現が区別される。表現行列と言っているが、$Spin(2) \simeq U(1)$ の場合は 1 次元なので、行列にはならないことに注意す

る。この時ローレンツ生成子 $\mathcal{O}_{+-}$ は $\theta$ に関する微分で与えられる。

$$\mathcal{O}_{+-} = \frac{1}{4i}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.30}$$

ここで添え字の $+,-$ については、反変ベクトル $V^a$ に対して $V^{\pm} = V^1 \pm iV^2$ と定義されている。

ここでまず $S^2$ を考えるために $S^2$ の幾何を与えていく。$S^2$ を構成するためには 2 つのパッチが必要となり、北極と南極からの立体射影を考える。北極からの立体射影座標を $(z, \bar{z})$ とすると、計量は以下のように与えられる。

$$g = \frac{2}{(1+|z|^2)^2}dz \otimes d\bar{z} + \frac{2}{(1+|z|^2)^2}d\bar{z} \otimes dz \tag{2.31}$$

この計量を与える 2 脚場として以下の形を考える。

$$e^1 = \frac{dz + d\bar{z}}{1+|z|^2}, \quad e^2 = -i\frac{dz - d\bar{z}}{1+|z|^2} \tag{2.32}$$

この 2 脚場から以下のようにスピン接続が計算される。

$$\Omega^{12} = -i\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1+|z|^2} \tag{2.33}$$

このスピン接続と (2.29) 式の表現行列を用いて、共変微分 $\nabla_{(a)}$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\nabla_{(+)} &= \frac{1}{2}e^{2i\theta}\left((1+|z|^2)\partial_z - \frac{i}{2}\bar{z}\partial_\theta\right)\\ \nabla_{(-)} &= \frac{1}{2}e^{-2i\theta}\left((1+|z|^2)\partial_{\bar{z}} + \frac{i}{2}z\partial_\theta\right)\end{aligned} \tag{2.34}$$

次に南極点からの射影座標を $(w, \bar{w})$ とし、ファイバーの座標を $\theta'$ とする。このとき、2 種類の射影による射影座標とファイバー座標の関係はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{w}\\ \theta' &= \theta + arg(z) + \frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{2.35}$$

ファイバー座標についてはパッチが重なる領域では、変換関数によって関係づいている。(2.35) 式を (2.34) 式に代入すると、確かに (2.34) 式と同じ形で書かれる。

$$\begin{aligned}\nabla^{[w]}_{(+)} &= \frac{1}{2}e^{2i\theta'}\left((1+|w|^2)\partial_w - \frac{i}{2}\bar{w}\partial'_\theta\right)\\ \nabla^{[w]}_{(-)} &= \frac{1}{2}e^{-2i\theta'}\left((1+|w|^2)\partial_{\bar{w}} - \frac{i}{2}w\partial'_\theta\right)\end{aligned} \tag{2.36}$$

これらの共変微分 $\nabla_{(a)}$ とローレンツ生成子 $\mathcal{O}_{ab}$ は以下の交換関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}[\nabla_{(+)}, \nabla_{(-)}] &= \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial\theta} = \mathcal{O}_{+-}\\ [\mathcal{O}_{+-}, \nabla_{(\pm)}] &= \mp\frac{1}{2}\nabla_{(\pm)}\end{aligned} \tag{2.37}$$

つまり共変微分 $\nabla_{(a)}$ とローレンツ生成子 $\mathcal{O}_{ab}$ は $\mathfrak{su}(2)$ 代数を満たす。

次に $T^2$ の場合を考える。$T^2$ のすべての領域を構成するには 4 つの座標パッチが必要である。これらの座標を $(z_i, \bar{z}_i)(i = 1, \cdots, 4)$ とする。この時最も簡単な計量は以下のように与えられる。

$$g_{z_i\bar{z}_i} = g_{\bar{z}_i z_i} = 1, \quad g_{z_i z_i} = g_{\bar{z}_i\bar{z}_i} = 0 \tag{2.38}$$

また $T^2$ は平坦のためスピン接続が 0 になり、共変微分 $\nabla_{(\pm)}$ はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla_{(+)} &= e^{-2i\theta_i}\partial_{z_i} \\ \nabla_{(-)} &= e^{2i\theta_i}\partial_{\bar{z}_i} \end{aligned} \tag{2.39}$$

このことから $[\nabla_{(+)}, \nabla_{(-)}] = 0$ となり、これは $T^{2n}$ の平坦性を反映している。

## 2.5 行列模型への応用 (アインシュタイン方程式)

この節では、ここまで議論してきた行列の共変微分解釈の行列模型への応用として IIB 行列模型への応用について述べる。この応用により IIB 行列模型の運動方程式からアインシュタイン方程式を得ることができる。具体的な模型としては (1.1) 式の IIB 行列模型のボゾニックパートに質量項を加えた、以下のような模型を考える。

$$S = -\frac{1}{4g^2} tr\left([A_{(a)}, A_{(b)}][A^{(a)}, A^{(b)}]\right) + \frac{m^2}{g^2} tr\left(A_{(a)}A^{(a)}\right) \tag{2.40}$$

この模型の $A_{(a)}$ の運動方程式は以下のようになる。

$$[A^{(a)}, [A_{(a)}, A_{(b)}]] - 2m^2 A_{(b)} = 0 \tag{2.41}$$

この運動方程式の解として、共変微分解釈 $A_{(a)} = -i\nabla_{(a)}$ を考える。この運動方程式は ${R_{(a)}}^b$ が直交行列であることを用いると、以下のようになる。

$$[-i\nabla^a, [-i\nabla_a, -i\nabla_b]] - 2m^2(-i)\nabla_b = 0 \tag{2.42}$$

ここで、1 項目については、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} [[\nabla^a, \nabla_a, \nabla_b]] &= [\nabla^a, {R_{ab}}^{cd}\mathcal{O}_{cd}] \\ &= [\nabla^a, {R_{ab}}^{cd}]\mathcal{O}_{cd} + {R_{ab}}^{cd}[\nabla^a, \mathcal{O}_{cd}] \\ &= (\nabla^a {R_{ab}}^{cd})\mathcal{O}_{cd} - {R_b}^c\nabla_c \end{aligned} \tag{2.43}$$

${R_{ab}}^{cd}$ はリーマン曲率テンソルである。よって、運動方程式から以下の関係が得られる。

$$\nabla^a {R_{ab}}^{cd} = 0, \quad R_{bc} = -2m^2\delta_{bc} \tag{2.44}$$

２つ目の式は宇宙定数 $\Lambda = -(d-2)m^2$ となるアインシュタイン方程式である。１つ目の式は、２つ目の式とビアンキ恒等式によって得られる。行列模型から得られる運動方程式に行列の共変微分解釈を適用すると、アインシュタイン方程式が得られることが分かった。

# 3 Berezin-Toeplitz 量子化

この章では Berezin-Toeplitz(BT) 量子化についてレビューする。[33, 35, 36]BT 量子化とは多様体上の関数 (場) を、有限サイズの行列へ正則化する手法である。本論文では $2n$ 次元の K$\ddot{a}$hler 多様体の場合の BT 量子化をレビューする。[33]3.1 節で考える K$\ddot{a}$hler 多様体とファイバー束の定義を与え、多様体上の関数から行列への正則化により得られる行列を定義する。この方法により得られる行列を Toeplitz 演算子と呼ぶ。またこの Toeplitz 演算子が有限サイズの行列として与えられることを、Atiyah-Singer の指数定理と消滅定理を用いて証明する。3.2 節では Toeplitz 演算子の漸近的性質についてレビューする。Toeplitz 演算子は行列のサイズが無限大となる極限において、いくつかの望ましい性質を持つ。この節で見る Toeplitz 演算子の漸近的性質は次章で、多様体上の関数 (場) に作用する共変微分を有限サイズの行列へ正則化する上で、非常に重要な役割を果たす。

## 3.1 Berezin-Toeplitz 演算子

まずはこの章以降で考える多様体の定義を与える。多様体 $M$ を閉じた連結な $2n$ 次元の K$\ddot{a}$hler 多様体とする。$M$ は K$\ddot{a}$hler 構造 $(g, J, \omega)$ を持つ。ここで $g$ はリーマン計量、$J$ は概複素構造、$\omega$ がシンプレティック形式で以下の関係を満たす。

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot) \tag{3.1}$$

次に K$\ddot{a}$hler ポテンシャル $K$ を与える。K$\ddot{a}$hler ポテンシャルは、シンプレティック形式と Dolbeault 微分演算子 $\partial, \bar{\partial}$ を用いて、$\omega = i\partial\bar{\partial}K$ を満たすような関数として与えられる。体積要素 $\mu$ は $\mu = \omega^n/n!$ で定義される。これは実座標 $\{x^\mu\}_{\mu=1}^{2n}$ で書くと、$\mu = \sqrt{g}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$ と書ける。次に行列への量子化写像を考えるために、エルミートなベクトルバンドル $L, S_c, E$ を導入する。$L$ は複素直線束、$S_c$ は spin-c 束であり、$E$ は多様体 $M$ 上のベクトルバンドルであり、この切断 $\Gamma(E)$ が我々の考えている場となる。つまり $\Gamma(E)$ の元から行列への量子化写像を考えていく。また以下の議論では任意のベクトルバンドル $F$ に対して、その接続と曲率をそれぞれ $\nabla^F = d + A^F$、$R^F = (\nabla^F)^2 = dA^F + A^F \wedge A^F$ と書く。ここで $A^F$ は $F$ の接続 1 形式である。以下でこれらのベクトル束の性質を見ていく。

まず複素直線束 $L$ についてはその曲率 $R^L$ が、以下を満たすように選ぶ。

$$R^L = -\frac{k}{2}(\partial - \bar{\partial})K \tag{3.2}$$

$k$ は $M$ 上の任意の 2-サイクル $\Sigma \subseteq M$ 上での曲率の積分が $\frac{i}{2\pi}\int_\Sigma R^L \in \mathbb{Z}$ を満たすような定数である。この条件はシンプレティック形式 $\frac{k}{2\pi}\omega$ が 2 次の整数コホモロジー群 $H^2(M, \mathbb{Z})$ に

属することと、等価な条件である。2 次元の多様体 $M = \Sigma$ の場合には、$k$ を $k = 2\pi/\int_M \omega$ と取ることができる。K$\ddot{a}$hler ポテンシャルを用いると、接続 $\nabla^L$ は以下のように与えられる。

$$\nabla^L = d + A^L, \quad A^L = -\frac{k}{2}(\partial - \bar{\partial})K \tag{3.3}$$

$L$ の切断 $\Gamma(L)$ は $U(1)$ 背景ゲージ場 $A^L$ と結合する、滑らかな複素スカラー場となる。2 次元の場合には曲率が体積要素に比例する。これは $L$ の切断が、一様な磁束と結合する複素スカラー場であることを意味している。

次に spin-c 構造について考える。spin-c 束 $S_c$ の接続 $\nabla^{S_c}$ は以下のように与えられる。

$$\nabla^{S_c} = d + \frac{1}{4}\Omega_{ab}\gamma^a_{(2n)}\gamma^b_{(2n)} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Omega_{m\bar{m}} \tag{3.4}$$

$\gamma^a_{(2n)}$ は $2n$ 次元のガンマ行列で、Clifford 代数 $\{\gamma^a_{(2n)}, \gamma^b_{(2n)}\} = 2\delta_{ab}I_{2^n}$ を満たす。$\Omega_{ab}$ はスピン接続で添え字 $m, \bar{m}$ は、局所ローレンツの添え字 $a, b$ を持つベクトル場 $V^a$ に対して、$V^m = \frac{1}{\sqrt{2}}(V^{2m-1} + iV^{2m}), V^{\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V^{2m-1} - iV^{2m})$ となるように変更したものである。

最後にベクトル束 $E$ について議論する。$E$ を有限ランクのエルミートベクトルバンドルと仮定する。そして $E$ を homomorphism bundle して表現する。$M$ 上のベクトル束 $E_i(i = 1, 2)$ を用いて $Hom(E_2, E_1)$ と書く。$Hom(E_2, E_1)$ はベクトルバンドルであり、その $x \in M$ におけるファイバーは $x$ での $E_2$ のファイバーから、$x$ での $E_1$ のファイバーへの線形写像のベクトル空間である。これから考える BT 量子化ではこの $E$ の切断、つまり $\Gamma(Hom(E_2, E_1))$ の元を場として考え、この場を行列へ正則化する。

ここまでで多様体とそのファイバー構造を与えたので、実際にＢＴ量子化の方法について議論していく。場 $\chi \in \Gamma(Hom(E_2, E_1))$ を行列へ正則化するために、$\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)$ について考える。$(i = 1.2)$ 前に述べたように $\chi \in \Gamma(Hom(E_2, E_1))$ は写像 $\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_2) \to \Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_1)$ と考えることができる。また $\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)$ は無限次元のベクトル空間である。よってこの線形写像を有限次元の部分空間に制限することができれば、その写像は有限サイズの行列として考えることができる。これが BT 量子化の基本的なアイデアである。そのために以下のようなディラック演算子を考える。

$$D_i = i\gamma^a_{(2n)}\nabla_a^{S_c\otimes L^{\otimes p}\otimes E_i} = ie^\mu_a\gamma^a_{(2n)}\left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\Omega_{bc\mu}\gamma^b_{(2n)}\gamma^c_{(2n)} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Omega_{m\bar{m}\mu} + pA^L_\mu + A^{E_i}_\mu\right) \tag{3.5}$$

また $\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)$ 上での内積を以下で与える。

$$(\psi', \psi) \equiv \int_M \mu(\psi')^\dagger \cdot \psi \quad (\psi, \psi' \in \Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)) \tag{3.6}$$

ここで $(\psi')^\dagger \cdot \psi$ については $x \in M$ でのファイバー $S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i$ のエルミート内積である。またノルムについてはこの内積を用いて、$|\psi| \equiv \sqrt{(\psi', \psi)}$ と定義する。(3.5) 式のディラッ

ク演算子の中に現れるガンマ行列については、Clifford 代数を満たすように以下のようにとる。まずカイラリティー行列を

$$\gamma_{(2n)} = (-i)^n \gamma^1_{(2n)} \gamma^2_{(2n)} \cdots \gamma^{2n}_{(2n)} \tag{3.7}$$

ととる。このカイラリティー行列はエルミートであり、すべてのガンマ行列と反可換、$\{\gamma_{(2n)}, \gamma^a_{(2n)}\}(a = 1, \cdots, 2n)$ である。そして表現として、$\gamma_{(2n)} = \sigma^3 \otimes I_{2^{n-1}}$ ととる。ここで $\{\sigma^a\}_{a=1,2,3}$ はパウリ行列であり、$\otimes$ はクロネッカー積である。ワイル表現は再帰的に以下のように構成できる。

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{(2)} = \sigma^1, \quad \gamma^2_{(2)} = \sigma^2, \\
&\gamma^i_{(2n+2)} = \sigma^2 \otimes \gamma^i_{(2n)} \quad (i = 1, 2, \cdots, 2n), \\
&\gamma^{2n+1}_{(2n+2)} = \sigma^2 \otimes \gamma_{(2n)}, \\
&\gamma^{2n+2}_{(2n+2)} = -\sigma^1 \otimes I_{2^n}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

また複素座標系でのガンマ行列を以下のように与える。

$$\gamma^m_{(2n)} = \frac{\gamma^{2m-1}_{(2n)} + i\gamma^{2m}_{(2n)}}{\sqrt{2}}, \quad \gamma^{\bar{m}}_{(2n)} = \frac{\gamma^{2m-1}_{(2n)} - i\gamma^{2m}_{(2n)}}{\sqrt{2}} \tag{3.9}$$

このように与えられた $\gamma^m_{(2n)}, \gamma^{\bar{m}}_{(2n)}$ は $\{\gamma^m_{(2n)}, \gamma^{\bar{l}}_{(2n)}\} = 2\delta_{ml}, \{\gamma^m_{(2n)}, \gamma^l_{(2n)}\} = \{\gamma^{\bar{m}}_{(2n)}, \gamma^{\bar{l}}_{(2n)}\} = 0$ を満たし、$(\gamma^m_{(2n)})^\dagger = \gamma^{\bar{m}}_{(2n)}$ となる。$|\pm\rangle$ をそれぞれ $\sigma^3$ の固有値 $\pm 1$ に対応する規格化された固有ベクトルとすると、以下の性質が得られる。

$$\begin{aligned}
&c_m \gamma^{\bar{m}}_{(2n)} |+\rangle^{\otimes n} = 0 \quad \Rightarrow c_m = 0 \\
&\gamma^m_{(2n)} |+\rangle^{\otimes n} = 0, \quad \gamma^m_{(2n)} \gamma^{\bar{l}}_{(2n)} |+\rangle^{\otimes n} = 2\delta_{ml} |+\rangle^{\otimes n}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$c_m$ は任意の複素数である。

ここで (3.5) 式で与えられるディラック演算子とそのゼロモードについて考える。これらのセットアップの下で (3.5) 式のディラック方程式を考えると、より単純な方程式になることを以下で見ていく。ゼロモード $\psi$ を以下のように書く。

$$\psi = f |+\rangle^{\otimes n} \quad (f \in \Gamma(L^{\otimes p} \otimes E_s)) \tag{3.11}$$

$|+\rangle$ は 2 次元スピノルを表し、$|+\rangle = (1, 0)^T$ である。この $\psi$ に対して以下のディラック方程式を考えていく。

$$D_i \psi = i e^\mu_a \gamma^a_{(2n)} \left( \partial_\mu + \frac{1}{4} \Omega_{bc\mu} \gamma^b_{(2n)} \gamma^c_{(2n)} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} \Omega_{m\bar{m}\mu} + p A^L_\mu + A^{E_i}_\mu \right) \psi = 0 \tag{3.12}$$

ここで (4.85) 式のスピン接続 $\Omega$ の項に注目する。この項の $\Omega_{bc} \gamma^b_{(2n)} \gamma^c_{(2n)}$ は以下のように計算できる。

$$\Omega_{bc} \gamma^b_{(2n)} \gamma^c_{(2n)} = \Omega_{m\bar{l}} \gamma^m_{(2n)} \gamma^{\bar{l}}_{(2n)} + \Omega_{\bar{l}m} \gamma^{\bar{l}}_{(2n)} \gamma^m_{(2n)} = 2\Omega_{m\bar{l}} \gamma^m_{(2n)} \gamma^{\bar{l}}_{(2n)} - 2 \sum_{m=1}^{n} \Omega_{m\bar{m}} \tag{3.13}$$

1 つ目の等号では $\Omega_{ml} = \Omega_{\bar{m}\bar{l}} = 0$ を用いている。2 つ目の等号では $\Omega_{m\bar{l}} = -\Omega_{\bar{l}m}$ とクリフォード代数 $\{\gamma^m_{(2n)}, \gamma^{\bar{l}}_{(2n)}\} = 2\delta_{ml} I_{2^n}$ を用いている。(3.13) 式とガンマ行列の性質 (3.10) 式からディラック方程式 (3.12) 式は以下のようになる。

$$D_i\psi = ie^{\bar{\mu}}_{\bar{m}}\gamma^{\bar{m}}_{(2n)} \left|+\right\rangle^{\otimes n} (\partial_{\bar{\mu}} + pA^L_{\bar{\mu}} + A^{E_i}_{\bar{\mu}})f = 0 \tag{3.14}$$

ここで (3.10) 式の $c_m\gamma^{\bar{m}}_{(2n)} \left|+\right\rangle^{\otimes n} = 0 \quad \Rightarrow c_m = 0$ より、最終的にディラック方程式 (3.12) 式は、$f \in \Gamma(L^{\otimes p} \otimes E_i)$ に対する微分方程式として以下のようになる。

$$(\partial_{\bar{\mu}} + pA^L_{\bar{\mu}} + A^{E_s}_{\bar{\mu}})f = 0 \tag{3.15}$$

次に Atiyah-Singer の指数定理と消滅定理を用いて、(3.5)、(3.8) 式で与えられるディラック演算子のゼロモードの空間が、十分大きな $p$ に対して有限次元となることを示す。カイラリティー行列 $\gamma_{(2n)} = I_{2^{n-1}} \otimes \sigma^3$ は $D_i$ と反可換であり、$D_i$ は以下のように分解することができる。

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & D_i^- \\ D_i^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

この様に分解したとき、$KerD_i^- = \{0\}$ となることをまず示す。(3.16) 式を 2 乗すると以下のようになる。

$$(D_i)^2 = \begin{pmatrix} D_i^- D_i^+ & 0 \\ 0 & D_i^+ D_i^- \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

ここで $Weitzenböck$ 公式を用いる。

$$(D_i)^2 = -\nabla_a\nabla_a + \frac{i}{2}\hbar_p^{-1}\gamma^a_{(2n)}\gamma^b_{(2n)}\omega_{ab} - \frac{1}{2}\gamma^a_{(2n)}\gamma^b_{(2n)}R^{S_c\otimes E_i}_{ab} \tag{3.18}$$

ここで $\hbar_p = (kp)^{-1}$ である。また以下のように添え字 $m, \bar{m}$ を用いた共変微分を定義する。

$$\nabla_m \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\nabla_{2m-1} - i\nabla_{2m}), \quad \nabla_{\bar{m}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\nabla_{2m-1} + i\nabla_{2m}) \tag{3.19}$$

これらの共変微分はある $m$ に対して以下のような関係を持つ。

$$\begin{aligned} \nabla_{2m-1}\nabla_{2m-1} + \nabla_{2m}\nabla_{2m} &= 2\nabla_m\nabla_{\bar{m}} - [\nabla_m, \nabla_{\bar{m}}] \\ &= 2\nabla_m\nabla_{\bar{m}} - \hbar_p^{-1} - R^{S_c\otimes E_i}_{m\bar{m}} \end{aligned} \tag{3.20}$$

この式を用いると、(3.18) 式の 1 項目は次のように書ける。

$$-\nabla_a\nabla_a = -2\nabla_m\nabla_{\bar{m}} + n\hbar_p^{-1} + R^{S_c\otimes E_i}_{m\bar{m}} \tag{3.21}$$

この式では添え字 $a, m$ について和が取られている。よって (3.18) 式は次のように書ける。

$$(D_i)^2 = -2\nabla_m \nabla_{\bar{m}} + \hbar_p^{-1} A_n + R_i \tag{3.22}$$

$$A_n \equiv n + \frac{i}{2}\gamma^a_{(2n)}\gamma^b_{(2n)}\omega_{ab} \tag{3.23}$$

$$R_i \equiv -\frac{1}{2}\gamma^a_{(2n)}\gamma^b_{(2n)}R^{S_c\otimes E_i}_{ab} + R^{S_c\otimes E_i}_{m\bar{m}} \tag{3.24}$$

(3.22) 式から任意の $\psi \in \Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)$ に対して以下の関係が成り立つ

$$|D_i\psi|^2 = 2|\nabla_{\bar{m}}\psi|^2 + \hbar_p^{-1}(\psi, A_n\psi) + (\psi, R_i\psi) \geq \hbar_p^{-1}(\psi, A_n\psi) - |R_i||\psi|^2 \tag{3.25}$$

この関係式において $\psi$ の負のカイラリティーに比例する部分に着目する。(3.8) 式の表現においては $(\psi, A_n\psi)$ の部分は正になる。このことから十分大きな $p$ について $\hbar_p^{-1} > |R_i||\psi|^2/(\psi, A_n\psi)$ が成り立つことが分かる。すると (3.25) 式の最右辺は正になり、少なくとも負のカイラリティー部分については $D_i\psi \neq 0$ となる。このことと (3.16) 式の分解から十分大きな $p$ に対して $KerD_i^- = \{0\}$ となることが分かる。よって $dimKerD_i = dimKerD_i^+$ が成り立ち、Atiyah-Singer の指数定理から $dimKerD_i$ は以下のようになる。

$$dimKerD_i = \int_M Td(T^{(1,0)}M) \wedge ch(L^{\otimes p} \otimes E_i) \tag{3.26}$$

ここで $Td(\cdot)$ と $ch(\cdot)$ はそれぞれ Todd class と Chern character であり、$T^{(1,0)}M$ は正則接バンドルである。(3.26) 式を $p$ で展開すると以下のようになる。

$$dimKerD_i = \frac{rank(E_i)}{(2\pi\hbar_p)^n}\int_M \mu + O(p^{n-1}) \tag{3.27}$$

その次元を $N_i \equiv dimKerD_i$ とすると、$N_i$ は正則化された行列のサイズとなり、この $N_i$ は複素直線束 $L$ のチャージ $p$ によって決定される。$\Pi_i$ を $\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_i)$ から $KerD_i$ への写像とすると、以下のように $\varphi \in \Gamma(Hom(E_2, E_1))$ に対する Berezin-Toeplitz 演算子を定義することができる。

$$T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi) = \Pi_1\varphi\Pi_2 \tag{3.28}$$

$T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)$ は $KerD_2$ から $KerD_1$ への写像であるため、$N_1 \times N_2$ の行列として表現される。このように定義される Toeplitz 演算子は $p \to \infty$ の極限で望ましい漸近的性質を持つ。その性質について次節で見ていく。

## 3.2 Berezin-Toeplitz 演算子の漸近的性質

この節では、前節で定義した Toeplitz 演算子の漸近的性質について議論する。前節 (3.28) 式で $\varphi \in \Gamma(Hom(E_2, E_1))$ に対する Toeplitz 演算子を定義したが、さらにもう一つのバンドル $\chi \in Hom(E_3, E_2)$ について考え、この $\chi$ に対する Toeplitz 演算子を $T_p^{(E_2,E_3)}(\chi) = \Pi_2\chi\Pi_3$

と定義する。この Toeplitz 演算子と (3.28) 式の Toeplitz 演算子の積を考えると、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi) &= \Pi_1\varphi\Pi_2\chi\Pi_3 \\ &= T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi) - \Pi_1\varphi(1-\Pi_2)\chi\Pi_3 \end{aligned} \tag{3.29}$$

$1-\Pi_2$ を計算するために、以下のような $\Gamma(S_c \otimes L^{\otimes p} \otimes E_2)$ 上のエルミート演算子を考える。

$$P_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & D_2^-(D_2^+D_2^-)^{-1} \\ (D_2^+D_2^-)^{-1}D_2^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

前節の議論から、十分大きな $p$ に対して $KerD_2^- = KerD_2^+D_2^- = \{0\}$ であるから $D_2^+D_2^-$ の逆は必ず存在する。また $D_2$ と $P_2$ について以下のような関係がある。

$$D_2P_2 = P_2D_2 = \begin{pmatrix} D_2^-(D_2^+D_2^-)^{-1}D_2^+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$P_2D_2P_2 = P_2 \tag{3.32}$$

(3.31) 式から $Ker(D_2P_2) = Ker(P_2D_2) = KerD_2$ であることが分かり、(3.32) 式から $(D_2P_2)^2 = D_2P_2$ であることが分かる。これら 2 点から、$D_2P_2$ が $(KerD_2)^\perp$ への射影演算子であることが分かり、それは正に $1-\Pi_2$ である。よって

$$1-\Pi_2 = D_2P_2 = D_2(P_2)^2D_2 \tag{3.33}$$

と書ける。ここで $\psi \in KerD_1, \phi \in KerD_3$ とし (3.29)、(3.33) 式を用いると以下のような関係が得られる。

$$\begin{aligned} (\psi, T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)\phi) &= (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) - (\psi, \varphi D_2(P_2)^2D_2\chi\phi) \\ &= (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) + (\psi, \varphi'(P_2)^2\chi'\phi) \end{aligned} \tag{3.34}$$

ここで $\varphi', \chi'$ はそれぞれ $\varphi' \equiv i\gamma^a_{(2n)}\nabla_a\varphi, \chi' \equiv i\gamma^a_{(2n)}\nabla_a\chi$ と定義した。ここでガンマ行列によりカイラリティーが変わるため、$\chi'\phi$ は負のカイラリティーを持ち、$\chi'\phi \in (KerD_2)^\perp$ である。$(KerD_2)^\perp$ に対しては、$1-\Pi_2 = D_2P_2$ は恒等演算子として作用するため、$P_2$ を $D_2^{-1}$ として解釈することができる。よって (3.34) 式は次のように書ける。

$$(\psi, T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)\phi) = (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) + (\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\chi'\phi) \tag{3.35}$$

ここでこの式の 2 項目について考える。ガンマ行列 (3.8) を用いると、$A_n\gamma^b_{(2n)}|+\rangle^{\otimes n} = 2\gamma^b_{(2n)}|+\rangle^{\otimes n}$ であることが示せる。このことと、(3.22) 式から 2 項目の $(D_2)^{-2}$ は

$$\begin{aligned} (D_2)^{-2} &= (-2\nabla_m\nabla_{\bar{m}} + 2\hbar_p^{-1} + R_2)^{-1} \\ &= \frac{\hbar_p}{2} - \frac{\hbar_p}{2}(D_2)^{-2} + \hbar_p(D_2)^{-2}\nabla_m\nabla_{\bar{m}} \end{aligned} \tag{3.36}$$

と評価できる。$D_3\phi = 0$ より、$\nabla_{\bar{m}}\phi = 0$ が得られる。すると (3.35) 式は次のようになる。

$$(\psi, T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)\phi) = (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) + \frac{\hbar_p}{2}(\psi, \varphi'\chi'\phi) + \epsilon \tag{3.37}$$

ここで $\epsilon$ は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\
\epsilon_1 &= -\frac{\hbar_p}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}R_2\chi'\phi) \\
\epsilon_2 &= \hbar_p(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}(\nabla_m\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + \hbar_p(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}(\nabla_{\bar{m}}\chi')\nabla_m\phi)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

それぞれの $\epsilon$ の $\hbar_p$ のオーダーを調べる。$\phi, \psi, \varphi, \chi$ のオーダーを $O(\hbar_p^0)$ とすると、非自明な $\hbar_p$ 依存性は $\nabla_m\phi$ と $(D_2)^{-2}$ の寄与のみに現れる。その依存性は (3.18) 式から見ることができ、$(D_2)^2$ のすべての固有値の範囲は、$C_1, C_2$ を $\hbar_p$ に独立な定数とし $[C_1\hbar_p^{-1} - C_2, \infty)$ である。このことから $(D_2)^{-2}$ の固有値の範囲は $(0, (C_1\hbar_p^{-1} - C_2)^{-1}]$ となる。さらに正の演算子のノルムが最大固有値と等しくなる性質を用いると、$|(D_2)^{-2}| = O(\hbar_p)$ と見積ることができる。次に $\nabla_m\phi$ については、以下のように評価できる。

$$\begin{aligned}
|\nabla_m\phi|^2 &= -(\phi, \nabla_{\bar{m}}\nabla_m\phi) = (\phi, [\nabla_m\nabla_{\bar{m}}]\phi) - (\phi, \nabla_m\nabla_{\bar{m}}\phi) \\
&= \hbar_p^{-1}|\phi|^2 - (\phi, R_{m\bar{m}}^{S_c\otimes E_3}\phi) \\
&= O(\hbar_p^{-1})
\end{aligned} \tag{3.39}$$

2 行目の等号では $\nabla_{\bar{m}}\phi = 0$ を用いた。よって $\epsilon_1, \epsilon_2$ の $\hbar_p$ のオーダーは以下のように見積ることができる。

$$|\epsilon_1| = O(\hbar_p^2), \quad |\epsilon_2| = O(\hbar_p^{\frac{3}{2}}) \tag{3.40}$$

これらの結果を考慮すると、(3.37) 式は以下のように評価できる。

$$(\psi, T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)\phi) = (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) - \frac{\hbar_p}{2}(\psi, (\nabla_a\varphi)(\nabla_b\chi)\gamma_{(2n)}^a\gamma_{(2n)}^b\phi) + O(\hbar_p^{\frac{3}{2}}) \tag{3.41}$$

さらに (3.8) 式のガンマ行列の表現を用いると、以下のようになる。

$$(\psi, T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)\phi) = (\psi, T_p^{(E_1,E_3)}(\varphi\chi)\phi) - \hbar_p(\psi, (\nabla_m\varphi)(\nabla_{\bar{m}}\chi)\phi) + O(\hbar_p^{\frac{3}{2}}) \tag{3.42}$$

この展開式から Toeplitz 演算子の漸近的性質として、以下の関係式が得られる。$\hbar_p$ のさらに高次の効果について見ていく。(3.42) 式の $O(\hbar_p^{\frac{3}{2}})$ の項は、ベルグマンカーネルの漸近展開により、$\hbar_p$ の冪が反整数分増えるため、次の冪は $O(\hbar_p^2)$ となる。(3.36) 式を $\epsilon_1$ に用いると、

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= -\frac{\hbar_p}{4}(\psi, \varphi'(\hbar_p(D_2)^{-2}R_2 + 2\hbar_p(D_2)^{-2}\nabla_m\nabla_{\bar{m}})R_2\chi'\phi) \\
&= -\frac{\hbar_p^2}{4}(\psi, \varphi' R_2\chi'\phi) + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}})
\end{aligned} \tag{3.43}$$

となる。一方 $\epsilon_2$ に適応すると、

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 &= \frac{\hbar_p}{2}(\psi, \varphi'(\hbar_p - \hbar_p(D_2)^{-2}R_2 + 2\hbar_p(D_2)^{-2}\nabla_l\nabla_{\bar{l}})\nabla_m(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) \\
&= \frac{\hbar_p^2}{2}(\psi, \varphi'\nabla_m(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + \hbar_p^2(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_l\nabla_{\bar{l}}\nabla_m(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}}) \\
&= -\frac{\hbar_p^2}{2}(\psi, \varphi'\nabla_m(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) - \hbar_p(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_m(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) \\
&\quad + \hbar_p^2(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}})
\end{aligned} \tag{3.44}$$

となる。最後の等号の 2 項目は $-\epsilon_2$ と同じなので、

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 &= -\frac{\hbar_p^2}{4}(\psi, (\nabla_m\varphi')(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + \epsilon_2' + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}}) \\
\epsilon_2' &= \frac{\hbar_p^2}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

となる。さらに $\epsilon_2'$ に (3.36) 式を用いて、

$$\begin{aligned}
\epsilon_2' &= \frac{\hbar_p^2}{4}(\psi, \varphi'(\hbar_p - \hbar_p(D_2)^{-2}R_2 + 2\hbar_p(D_2)^{-2}\nabla_k\nabla_{\bar{k}})\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) \\
&= \frac{\hbar_p^3}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_k\nabla_{\bar{k}}\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + O(\hbar_p^3) \\
&= \frac{\hbar_p^3}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_k\nabla_l\nabla_{\bar{k}}\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) - \frac{\hbar_p^2}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + O(\hbar_p^3) \\
&= \frac{\hbar_p^3}{2}(\psi, \varphi'(D_2)^{-2}\nabla_k\nabla_l\nabla_m(\nabla_{\bar{k}}\nabla_{\bar{l}}\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) - 2\epsilon_2' + O(\hbar_p^3)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

と計算できる。(3.39) 式と同様に考えると $|\nabla_k\nabla_l\nabla_m\phi| = O(\hbar_p^{-\frac{3}{2}}), |\nabla_l\nabla_m\phi| = O(\hbar_p^{-1})$ と見積れるので、$\epsilon_2' = O(\hbar_p^{\frac{5}{2}})$ となる。よって $\epsilon$ は

$$\epsilon = -\frac{\hbar_p^2}{4}(\psi, \varphi' R_2\chi'\phi) - \frac{\hbar_p^2}{4}(\psi, (\nabla_m\phi')(\nabla_{\bar{m}}\chi')\phi) + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}}) \tag{3.47}$$

と評価できる。さらにガンマ行列の性質を用いると, 最終的に次のように評価できる。

$$\epsilon = \hbar_p^2(\psi, (\nabla_m\varphi)(R_{\bar{m}lk\bar{k}} - R^{E_2}_{\bar{m}l})(\nabla_{\bar{l}}\chi)\phi) + \frac{\hbar_p^2}{2}(\psi, \nabla_m\nabla_l\varphi)(\nabla_{\bar{m}}\nabla_{\bar{l}}\chi)\phi) + O(\hbar_p^{\frac{5}{2}}) \tag{3.48}$$

これらの結果を用いると、(3.29) 式の左辺 $T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi)$ は以下のように漸近展開することができる。

$$T_p^{(E_1,E_2)}(\varphi)T_p^{(E_2,E_3)}(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty}\hbar_p^i T_p^{(E_1,E_3)}(C_i(\varphi,\chi)) \tag{3.49}$$

$i = 0, 1, 2$ の場合の $C_i$ の値は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
C_0(\varphi,\chi) &= \varphi\chi \\
C_1(\varphi,\chi) &= -\frac{1}{2}G^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\varphi)(\nabla_\beta\chi) \\
C_2(\varphi,\chi) &= \frac{1}{8}G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}[(\nabla_\alpha\varphi)(iR_{\beta\gamma\mu\nu}W^{\mu\nu} - 2R^{E_2}_{\beta\gamma})(\nabla_\delta\chi) + (\nabla_\alpha\nabla_\gamma\varphi)(\nabla_\beta\nabla_\delta\chi)]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

ここで $G^{\alpha\beta}$ については $G^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} + iW^{\alpha\beta}$ と定義した。$g^{\alpha\beta}$ は計量テンソルの逆であり、$W^{\alpha\beta}$ はポワッソンテンソルで $\omega_{\mu\nu}W^{\mu\rho} = \delta^{\rho}_{\nu}$ で定義されている。$R_{\beta\gamma\mu\nu}$ は計量 $g$ に対するリーマン曲率テンソルで、$R^{E_2}_{\alpha\beta} \equiv R^{E_2}(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ は $E_2$ の曲率である。(3.50) 式で現れる $\nabla_\alpha$ はそれぞれの場に作用する共変微分である。例えば $\varphi \in \Gamma(Hom(E_2, E_1))$ に対しては、$\nabla_\alpha\varphi = \partial_\alpha\varphi + A^{E_1}_\alpha\varphi - \varphi A^{E_2}_\alpha$ のように作用する。ここで $A^{E_i}$ は $E_i$ の接続 1 形式である。

(3.49)、(3.50) 式の漸近展開を用いると、以下の 2 つの関係式を示すことができる。

$$\lim_{p\to\infty} |T^{(E_1,E_2)}_p(\varphi)T^{(E_2,E_3)}_p(\chi) - T^{(E_1,E_3)}_p(\varphi\chi)| = 0 \tag{3.51}$$

$$\lim_{p\to\infty} |i\hbar_p^{-1}[T(f\mathbf{1}), T^{(E_1,E_2)}_p(\varphi)] - T^{(E_1,E_2)}_p(\{f,\varphi\})| = 0 \tag{3.52}$$

ここで $f$ 多様体 $M$ 上の関数 $f \in C^\infty(M)$ であり、恒等演算子の $\mathbf{1}$ は $\mathbf{1}_{E_i} \in \Gamma(End(E_i))$ である。(3.52) 式の [　,　] は拡張された交換子で以下のように定義される。

$$[T(f\mathbf{1}), T^{(E_1,E_2)}_p(\varphi)] \equiv T^{(E_1,E_1)}_p(f\mathbf{1}_{E_1}), T^{(E_1,E_2)}_p(\varphi) - T^{(E_1,E_2)}_p(\varphi)T^{(E_2,E_2)}_p(\varphi)(f\mathbf{1}_{E_2}) \tag{3.53}$$

(3.52) 式の $\{f,\varphi\}$ は一般化されたポワッソン括弧であり、以下のように定義される。

$$\{f,\varphi\} \equiv W^{\alpha\beta}(\partial_\alpha f)(\nabla_\beta\varphi) \tag{3.54}$$

(3.51) 式は 2 つの場それぞれに対する Toeplitz 演算子の積が、場の積に対する Toeplitz 演算子と等しいことを意味している。(3.52) 式は Toeplitz 演算子の拡張された交換子が、場のポワッソン括弧に対する Toeplitz 演算子と等しいことを意味している。これらの性質は、次章で場に作用する共変微分を有限サイズの行列へ正則化する上で、非常に重要な性質となる。

# 4　共変微分の有限サイズ行列正則化

2 章で行列が正則表現を用いて $A_{(a)} = -i\nabla_{(a)}$ と解釈されることを見た。しかしこの解釈の下では、行列のサイズが無限大となってしまい、実際の数値シミュレーションの計算に応用することはできない。そこで、この章では $2n$ 次元の Kähler 多様体上の関数に作用する共変微分を、有限サイズの行列に正則化する [34]。この正則化には、3 章でレビューした Berezin-Toeplitz 量子化を用いる。4.1 節で多様体上の場に作用する共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化を、多様体上の場に対する Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ に作用する線形演算子の形で与え、カットオフを挿入し有限サイズの行列として表現する。この議論では $T(\varphi)$ が長方形行列として得られるが、4.2 節では $T(\varphi)$ が正方行列として得られる方法について議論する。4.3 節では $n = 1$、つまり 2 次元の Kähler 多様体の場合 [16] について議論し、4.4 節 4.5 節ではそれぞれ具体例として 2 次元球面 $S^2$ と $2n$ 次元トーラス $T^{2n}$ の場合について考え、2 章でレビューした行列の共変微分解釈の結果を再現することを見る。

## 4.1　共変微分の有限サイズ行列への正則化

まずは 2 章でのレビューに基づいて考える多様体を定義し、そのファイバー束を考える。$M$ を $2n$ 次元の Kähler 多様体とする。また $E_{reg}$ を $M$ 上のファイバー束とし、その滑らかな切断の集合を $\Gamma(E_{reg})$ とする。そして $V_{reg}$ を $Spin^c(2n)$ の正則表現の空間とする。つまり多様体 $M$ 上の関数 $f$ は以下のように与えられる。

$$V_{reg} \equiv \{f : Spin^c(2n) \to \mathbb{C}\} \tag{4.1}$$

また 2 章と同様に、$f$ への群の作用 $h$ を以下のように与える。

$$(\hat{h}f)(g) = f(h^{-1}g), \quad h \in Spin^c(2n), \quad f \in V_{reg} \tag{4.2}$$

このとき $f \in \Gamma(E_{reg})$ は $M$ 上の各座標パッチ $U_i$ で定義され、パッチが重なる領域 $x \in U_i \cap U_j$ で以下の接続条件を満たす。

$$f^{[j]}(x, g) = f^{[i]}(x, t_{ij}(x)g) \tag{4.3}$$

$t_{ij}(x)$ は変換関数である。さらに $f$ に作用する共変微分 $\nabla_a$ は以下のように定義される。

$$\nabla_a \equiv e_a^\mu(x)\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu^{bc}(x)\mathcal{O}_{bc} - iA_\mu(x)\right) \tag{4.4}$$

$e_a^\mu(x)$ は多脚場、$\omega_\mu^{bc}(x)$ はスピン接続、$\mathcal{O}_{bc}$ は局所ローレンツ変換の生成子、$A_\mu(x)$ は $Spin^c(2n)$ の $U(1)$ ゲージ場である。ここで局所ローレンツ変換の生成子 $\mathcal{O}_{bc}$ は $f \in \Gamma(E_{reg})$

に対して以下のように作用する。

$$\left(\left(1+\frac{i}{2}\epsilon^{bc}\mathcal{O}_{bc}\right)f\right)(x,g)=f\left(x,\left(1+\frac{i}{2}\epsilon^{bc}M_{bc}\right)^{-1}g\right) \tag{4.5}$$

$M_{bc}$ は $Spin^c(2n)$ の基本表現の表現行列である。(4.4) 式の共変微分では 2 章で述べたように、素朴に行列として解釈することができないので、以下のように括弧つき添え字を持つ $\nabla_{(a)}$ を定義する。

$$\nabla_{(a)} \equiv R_{(a)}{}^{b}(g^{-1})\nabla_b \tag{4.6}$$

$R_{(a)}{}^{b}(g^{-1})$ は $Spin^c(2n)$ のベクトル表現の表現行列である。

これらの定義の下でまずは、$\varphi(x,g)\in\Gamma(E_{reg})$ を BT 量子化を用いてどのように行列正則化されるのかについて考える。2 章で述べたように正則表現は無限次元なので、$\varphi(x,g)$ を直接 BT 量子化することはできない。そのため、まず $\varphi(x,g)$ を Peter-Weyl の定理を用いて以下のように展開する。

$$\varphi(x,g)=\sum_{r:irr}\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)\sqrt{d_r}R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g) \tag{4.7}$$

この式の和についてはすべての既約表現 $r$ について和がとられていて、添え字 $i,(j)$ についてもそれぞれ和が取られている。$d_r$ は表現 $r$ の次元であり、$R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g)$ は $g\in Spin^c(2n)$ の表現 $r^*$ の表現行列である。ここで展開係数 $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ に注目する。$\varphi(x,g)$ とは違い、$\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ は既約表現 $r$ の展開係数なので有限次元であり、BT 量子化することができる。そのため展開係数 $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ の BT 量子化を考える。$\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ の添え字 $i$ は $Spin^c(2n)$ の変換で $r$ 表現の場として変換されるが、添え字 $(j)$ は変換されない。よって $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ は $Spin^c(2n)$ の変換に対して $r$ 表現の場として考えることができる。このことから $E_r$ をファイバーが $Spin^c(2n)$ の表現 $r$ における表現空間とするファイバー束とし、$E_{trivial}$ をファイバーが $Spin^c(2n)$ の自明表現の表現空間とするファイバー束とする。すると、$\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ は $Hom(E_r,E_{trivial})$ の切断として考えられる。よって 3 章での手続きから $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ について BT 量子化を行い、得られる Toeplitz 演算子を $T^{(r,1)}(\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)})$ と書くと、以下のように書くことができる。

$$T^{(r,1)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)_{IJ}=\int_M\mu\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^{\dagger}\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)\psi^{\langle 1\rangle}_{J}(x) \tag{4.8}$$

ここで $\mu$ は多様体 $M$ の体積要素であり、$\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)$ は、ディラック演算子 $D^{(E_r)}$ の規格化可能なゼロモード $KerD^{(E_r)}$ の正規直交基底である。大文字の添え字 $I$ は 1 から $dimKerD^{(E_r)}$ までの値を取り、ゼロモードを区別する足である。小文字の添え字 $i$ は $Spin^c(2n)$ に対する変換を表す足であり、1 から $d_r$ まで走る。また $\psi^{\langle 1\rangle}_{J}(x)$ の中の 1 は自明表現を表しており、大文字の添え字 $J$ は 1 から $dimKerD^{(E_{trivial})}$ までの値を取る。また $\psi^{\langle 1\rangle}_{J}(x)$ は $Spin^c(2n)$ の自明表現の空間のため、$Spin^c(2n)$ 変換に対する足は持たない。

(4.8) 式で与えられる Toeplitz 演算子は非常に多くの添え字を持ち、これらの添え字は本論文内で頻繁に登場する。そのため表 1 で、各添え字とその添え字が表すものをまとめた。

表 1　各添え字の役割

| 添え字 | | 添え字が表す物 |
|---|---|---|
| $\langle r \rangle$ | — | $Spin^c(2n)$ の表現 |
| (j),(l) などの括弧つき小文字添え字 | — | $Spin^c(2n)$ 変換で変換しない足 |
| $i$ などの括弧がない小文字添え字 | — | $Spin^c(2n)$ 変換で変換する足 — |
| $I, J$ などの大文字添え字 | — | Dirac ゼロモードを指定する足 |

ここで (4.8) 式の被積分関数全体の $Spin^c(2n)$ 変換に対する変換性を考えてみる。$h \in Spin^c(2n)$ として $Spin^c(2n)$ 変換を施すと以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger \tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)\psi^{\langle 1\rangle}_J(x) &\to \left(R^{\langle r\rangle}_{ii'}(h)\psi^{\langle r\rangle}_{I;i'}(x)\right)^\dagger R^{\langle r\rangle}_{ii''}(h)\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i''(j)}(x)\psi^{\langle 1\rangle}_J(x) \\ &= \left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger \tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)\psi^{\langle 1\rangle}_J(x) \end{aligned} \tag{4.9}$$

この式の $R(h)$ は $Spin^c(2n)$ の表現行列であり、2 行目の等号では $R(h)$ がユニタリー行列であることを用いた。(4.9) 式の計算から Toeplitz 演算子 $T^{(r,1)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)_{IJ}$ はパッチの選び方に依存しないことが分かる。このようにして $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)$ に対する BT 演算子は構成できる。この結果を用いると $\varphi$ に対する Toeplitz 演算子も以下のように与えることができる。

$$(T(\varphi) \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv T^{(r,1)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)_{IJ} \tag{4.10}$$

これらから $\varphi$ に対する Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ は $\varphi$ を Peter-Weyl の定理により展開し、その展開係数 $\tilde{\varphi}$ に対して BT 量子化を行って得られる Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ を並べることで得ることができる。図 1 に長方形行列として得られる行列 $T(\varphi)$ を書いた。図 1 から分かるように、$T(\varphi)$ は縦に長い行列として得られる。ここで行列のサイズに注目すると、$T(\varphi)$ の行列サイズは $\left(\sum_r d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \times \left(dimKerD^{(E_{trivial})}\right)$ となっている。(4.7) 式から分かるように $\varphi(x,g)$ は展開の際にすべての既約表現に対して和が取られているため、$\varphi$ に対する Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ の行列のサイズは無限大となる。ここで $T(\varphi)$ を有限サイズにするためにカットオフを導入する。(4.7) 式の既約表現の和について、その表現のカシミヤが $\Xi$ 以下であるような和に制限する。そして $\Xi \ll p$ を保ちながら $\Xi \to \infty, p \to \infty$ を取る。このカットオフを挿入することにより、$T(\varphi)$ を有限サイズ行列として表現することができる。この時 $T(\varphi)$ は $\left(\sum_{r \text{ のカシミヤ}\le\Xi} d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \times \left(dimKerD^{(E_{trivial})}\right)$ の長方形行列となる。ここで述べた $\varphi$ の行列正則化では $T(\varphi)$ が長方形行列として正則化されるが、正方行列に正則化する方法もある。この方法については 4.2 節で取り扱う。

次に $\varphi$ に括弧付き添え字を持つ共変微分を作用させた $-i\nabla_{(a)}\varphi$ の行列正則化 $T(-i\nabla_{(a)}\varphi)$ について考える。2 章での議論から $-i\nabla_{(a)}\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ である。括弧付きの足を持つ $\nabla_{(a)}$

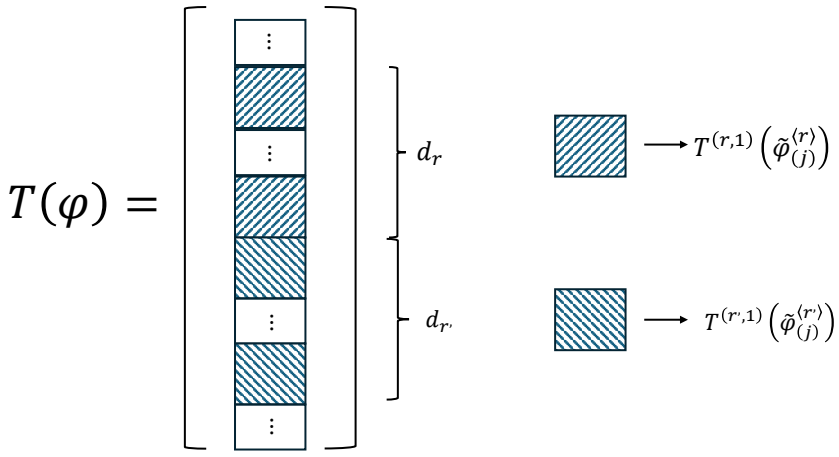



図 1　長方形行列として得られる行列 $T(\varphi)$

は (4.4)、(4.6) 式より $\varphi(x,g)$ に対して以下のように作用する。

$$\nabla_{(a)}\varphi(x,g) = R^{\langle v\rangle}_{(a)b}(g^{-1})e^{\mu}_{b}(x)\left(\partial_{\mu} + \frac{1}{2}\Omega^{cd}_{\mu}(x)\mathcal{O}_{cd} + A_{\mu}(x)\right)\varphi(x,g) \tag{4.11}$$

$R^{\langle v\rangle}_{(a)b}$ の $\langle v\rangle$ は $Spin^{c}(2n)$ 群のベクトル表現の表現行列であることを表している。ここで $\varphi(x,g)$ を (4.7) 式のように展開すると、(4.11) 式は次のように書くこともできる。

$$\nabla_{(a)}\varphi(x,g) = R^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)\nabla_{b}\left(\sum_{r'}\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\sqrt{d_{r'}}R^{\langle r'^{*}\rangle}_{k(l)}(g)\right) \tag{4.12}$$

この変形では $R^{\langle v\rangle}_{(a)b}$ が直交行列であることによる性質を用いている。ここで共変微分 $\nabla_b$ は (4.4) 式で与えられている通り、時空の座標 $x$ に作用する部分と $Spin^{c}(2n)$ 群の座標 $g$ に作用する部分がある。ここで後者の $g$ に関する微分を、展開係数 $\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)$ に関する微分と解釈し直すことができる。つまり、

$$\nabla_{(a)}\varphi(x,g) = \sum_{r'}\left(\nabla_{b}\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\sqrt{d_{r'}}R^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^{*}\rangle}_{k(l)}(g) \tag{4.13}$$

もように解釈することができる。ここで $\nabla_b$ の中の $g$ に関する微分、つまり $\mathcal{O}_{cd}$ は $\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)$ に対して以下のように作用する。

$$\mathcal{O}_{cd}\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x) = \left(\mathcal{O}^{\langle r'\rangle}_{cd}\right)_{kk'}\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k'(l)}(x) \tag{4.14}$$

$\mathcal{O}^{\langle r'\rangle}_{cd}$ はローレンツ生成子の $r'$ 表現の表現行列である。ここで (4.13) 式の $R^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^{*}\rangle}_{k(l)}(g)$ についてはベクトル表現と $r'^{*}$ 表現の直積であり、これはクレブッシュゴルダン係数を用いて以下のように表現できる。

$$R^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^{*}\rangle}_{k(l)}(g) = \sum_{r}C^{v,r'^{*};r}_{b(a),k(l);i(j)}R^{\langle r'^{*}\rangle}_{i(j)}(g) \tag{4.15}$$

これらの結果を用いると $\nabla_{(a)}\varphi(x,g)$ は以下のように評価できる。

$$\nabla_{(a)}\varphi(x,g) = \sum_{r}\left(\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^{*};r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_{b}\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\right)\sqrt{d_r}R^{\langle r'^{*}\rangle}_{i(j)}(g) \tag{4.16}$$

よって $\varphi(x,g)$ の行列正則化の時と同様に考えると、$\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)$ についての行列正則化を考えればよい。よって $-i\nabla_{(a)}\varphi(x,g)$ に対する行列正則化 $T(-i\nabla_{(a)}\varphi(x,g))$ は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned}&(T(-i\nabla_{(a)}\varphi)\text{ の }(r,j)\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分})\\&=T^{(r,1)}\left(-i\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\right)_{IJ}\end{aligned}\tag{4.17}$$

ここで $T^{(r,1)}\left(-i\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\right)_{IJ}$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}&T^{(r,1)}\left(-i\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\right)_{IJ}\\&\equiv\int_M\mu\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger(-i)\sum_{r'}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(x)\right)\psi^{\langle 1\rangle}_J(x)\end{aligned}\tag{4.18}$$

$T(\varphi)$ の時と同様に大文字の添え字 $I,J$ はゼロモードを区別する足であり、小文字の添え字 $i,k$ は $Spin^c(2n)$ 群の変換で変換される足であり、括弧付きの添え字 $(j),(l)$ は正則表現のラベルを表す足である。

ここでいよいよ共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化の定義を与える。それは $T(\varphi)$ に作用する線形演算子 $\mathcal{P}_{(a)}$ の形で、以下のように定義される。

$$\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi)=\hbar_pT(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\varphi)]-\frac{1}{2}\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A),T(X^A)]T(\varphi)\tag{4.19}$$

ここで 3 章で定義した通り、$\hbar_p=\frac{1}{kp}$ である。この式において $p\to\infty$ の極限をとり、3 章で示した Toeplitz 演算子の漸近的性質 (3.51)、(3.52) 式を用いると以下のようになり、$\mathcal{P}_{(a)}$ が共変微分の行列正則化になっていることが分かる。

$$\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi)=T(-i\nabla_{(a)}\varphi)+O\left(\frac{1}{p}\right)\tag{4.20}$$

この関係を示す前に (4.19) 式の $T(X^A),T(\partial_{(a)}X^A)$ について述べる。$X^A(A=1,\cdots,D)$ は $2n$ 次元 Kähler 多様体 $M$ を $D$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^D$ に isometric に埋め込んだ場合の埋め込み関数である。$\partial_{(a)}X^A$ については (4.12) 式と同じように以下のように定義される。

$$\partial_{(a)}X^A\equiv R^{\langle v\rangle}_{(a)b}(g^{-1})e^\mu_b\partial_\mu X^A\tag{4.21}$$

また $\mathbb{R}^D$ への埋め込みであることから $\partial_aX^A\partial_bX^A=\delta_{ab}$ を満たす。次にこの埋め込み関数 $X^A$ の行列正則化 $T(X^A)$ について考える。(4.19) 式の 1 項目を見ると $T(X^A)$ が $T(\varphi)$ との交換子を取っていることが分かる。しかし先に述べた通り $T(\varphi)$ は長方形行列である。つまり交換子において $T(X^A)$ が $T(\varphi)$ に対して、左から掛けるか右から掛けるかで行列のサイ

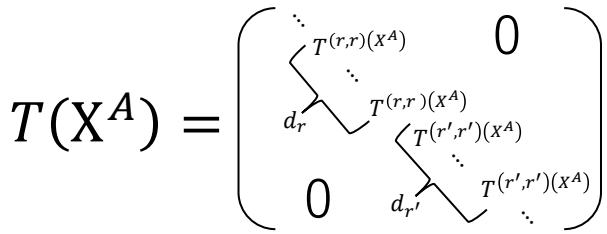



図 2　正方形行列として得られる行列 $T(X^A)$

ズが異なる。(4.19) 式の 1 項目の交換子は $[T(X^A), T(\varphi)] \equiv T(X^A)T(\varphi) - T(\varphi)T'(X^A)$ と書いた時、$T(X^A)$ と $T'(X^A)$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&T(X^A) \text{ の行列サイズ} \to \left(\sum_r d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \times \left(\sum_r d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \\
&(T(X^A) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv \delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl} T^{\langle r,r\rangle}(X^A \mathbf{1}_{E_r})_{IJ} \qquad (4.22) \\
&T'(X^A) \text{ の行列サイズ} \to (dimKerD^{(E_{trivial})}) \times (dimKerD^{(E_{trivial})}) \\
&(T'(X^A) \text{ の } (I,J) \text{ 成分}) \equiv T^{(1,1)}(X^A)_{IJ} \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

(4.22) 式と (4.23) 式の $T^{\langle r,r\rangle}(X^A \mathbf{1}_{E_r})$ と $T^{(1,1)}(X^A)$ はそれぞれ以下で与えれる Toeplitz 演算子である。

$$
\begin{aligned}
T^{\langle r,r\rangle}(X^A \mathbf{1}_{E_r})_{IJ} &= \int_M \mu \left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger X^A(x) \psi^{\langle r\rangle}_{J;i}(x) \qquad (4.24) \\
T^{(1,1)}(X^A) &= \int_M \mu \left(\psi^{\langle 1\rangle}_{I}(x)\right)^\dagger X^A(x) \psi^{\langle 1\rangle}_{J}(x) \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

$T(X^A)$ は図 2 に示したように、対角ブロックのみに $r$ 表現の $X^A$ の Toeplitz 演算子を持つ行列であり、$T'(X^A)$ は自明表現の Toeplitz 演算子である。次に $\partial_{(a)}X^A$ の行列正則化 $T(\partial_{(a)}X^A)$ について考える。(4.19) 式を見ると $T(\partial_{(a)}X^A)$ は $T(X^A)$ と交換子を取る形で現れる。(4.22)、(4.23) 式より $T(X^A)$ は正方行列であるため、$T(\partial_{(a)}X^A)$ についても正方行列となる。$T(-i\nabla_{(a)}\varphi)$ の時と同様に考えると、$T(\partial_{(a)}X^A)$ は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&T(\partial_{(a)}X^A) \text{ の行列サイズ} \to \left(\sum_r d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \times \left(\sum_r d_r dimKerD^{(E_r)}\right) \\
&(T(\partial_{(a)}X^A) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A\right)_{IJ} \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

$\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A$ の Toeplitz 演算子は以下で与えられる。

$$
T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A\right)_{IJ} = \int_M \mu \left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A(x) \psi^{\langle r'\rangle}_{J;k}(x) \qquad (4.27)
$$

$\omega_{cb}$ は多様体 $M$ のシンプレティック形式である。この Toeplitz 演算子はクレブッシュゴルダン係数 $C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}$ により、ベクトル表現と $r'^*$ 表現の直積表現を既約分解した際 $r$ 表現が現れなければ、そのような $r, r'$ 表現に対して $((r,j),(r',l))$ ブロックは 0 となる。

ここからは 3 章で見た Toeplitz 演算子の漸近的性質を用いて、(4.20) 式を示す。まずは (4.19) 式の 2 項目に着目する。この 2 項目は以下のような計算から $p \to \infty$ の極限において 0 となる。

$$
\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi) \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= -\hbar_p^{-1} \sum_{r'} \sum_{l,K} \left[ T(X^A\mathbf{1}), T^{(r,r')} \left( \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A \right) \right]_{IK} T^{(r',1)} \left( \tilde{\varphi}^{\langle r' \rangle}_{(l)} \right)_{KJ} \\
&= \sum_{r'} \sum_{l} T^{(r,1)} \left( iW^{de} (\partial_d X^A) \nabla_e \left( \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} \partial^c X^A \right) \tilde{\varphi}^{\langle r' \rangle}_{k(l)} \right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= T^{(r,1)} \left( i \sum_{r'} \sum_{l} W^{de} (\partial_d X^A) \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} \omega_{cb} (\nabla_e \partial^c X^A) \tilde{\varphi}^{\langle r' \rangle}_{k(l)} \right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

ここで 3 行目の等号については、$\nabla_e C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)} = 0$ と、Kähler 構造の性質 $\nabla_e \omega_{cb} = 0$ を用いた。また最後の等号では $(\partial_d X^A)(\nabla_e \partial^c X^A)$ に対して以下のように計算している。

$$
\begin{aligned}
(\partial_d X^A)(\nabla_e \partial^c X^A) &= \nabla_e((\partial_d X^A)(\partial^c X^A)) - (\nabla_e \partial_d X^A)(\partial^c X^A) \\
&= \nabla_e \delta_d{}^c - (\nabla_e \partial_d X^A)(\partial^c X^A) \\
&= \nabla_d (\partial_e X^A)(\partial^c X^A) + (\partial_e X^A)(\nabla_d \partial^c X^A) \\
&= (\partial_e X^A)(\nabla_d \partial^c X^A) \\
&= -(\nabla_e \partial^c X^A)(\partial_d X^A) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

途中 $\nabla_e \delta_d{}^c = 0$ と $\nabla_d \partial^c X^A = \nabla_c \partial^d X^A$ を用いている。(4.28) 式から一見すると (4.19) 式の 2 項目が不要であるかのように思える。しかしこの 2 項目が $\mathcal{P}_{(a)}$ のエルミート性のために必要であることを後で見る。

続いて (4.19) 式の 1 項目に注目する。(4.28) 式の計算と同じように計算すると以下のよう

に評価できる。

$$
\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-1}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\varphi)] \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分})\\
&= \hbar_p^{-1}\sum_{r'}\sum_{l,K} T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}\omega_{cb}\partial^c X^A\right)_{IK}\left[T(X^A\mathbf{1}),T^{(r',1)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{(l)}\right)\right]_{KJ}\\
&= -i\sum_{r'}\sum_{l,K} T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}\omega_{cb}\partial^c X^A\right)_{IK} T^{(r',1)}\left(\{X^A,\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{(l)}\}\right)_{KJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)\\
&= -i\sum_{r'}\sum_{l} T^{(r,1)}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}\omega_{cb}(\partial^c X^A)\{X^A,\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}\}\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)\\
&= -i\sum_{r'}\sum_{l} T^{(r,1)}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}\omega_{cb}(\partial^c X^A)W^{de}(\partial_d X^A)\left(\nabla_e\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}\right)\right)_{IJ} + \left(\frac{1}{p}\right)\\
&= T^{(r,1)}\left(-i\sum_{r'}\sum_{l}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a),(l);(j)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{k(l)}\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)\\
&= \left(T(-i\nabla_{(a)}\varphi) \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

ここで 6 行目の等号については $(\partial^c X^A)(\partial_d X^A) = \delta^c{}_d$ と $\omega_{cb}W^{ce} = \delta^e_b$ の関係を用いた。以上の計算により (4.20) 式を示すことができ、(4.19) 式で定義される $\mathcal{P}_{(a)}$ が共変微分の有限行列への正則化になっていることが分かる。

次に $\mathcal{P}_{(a)}$ のエルミート性について述べる。まずエルミート性の定義を与える。$\varphi,\varphi' \in \Gamma(E_{reg})$ に対する Toeplitz 演算子 $T(\varphi),T(\varphi')$ の内積を以下のように与える。

$$
(T(\varphi),T(\varphi')) \equiv Tr(T(\varphi)^\dagger T(\varphi')) \tag{4.31}
$$

$T(\varphi)^\dagger$ は $T(\varphi)$ に対する通常のエルミート共役である。この式の右辺にあるトレースについては、以下のように与えられる。

$$
Tr(T(\varphi)^\dagger T(\varphi')) = \sum_r\sum_j\sum_{I,J} T^{(r,1)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle r'\rangle}_{(j)}\right)^*_{IJ} T^{(r,1)}\left(\tilde{\varphi}'^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)_{IJ} \tag{4.32}
$$

この内積を用いて $\mathcal{P}_{(a)}$ のエルミート共役を以下のように定義する。

$$
(\mathcal{P}^\dagger_{(a)}T(\varphi),T(\varphi')) \equiv (T(\varphi),\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi')) \tag{4.33}
$$

これらの定義の下で実際に (4.19) 式の形がエルミートであることを調べる。その準備としてまず $T(X^A),T'(X^A),T(\partial_{(a)}X^A)$ がエルミートであることを示す。$T(X^A),T'(X^A)$ については (4.24)、(4.25) 式から明らかにエルミートである。$T(\partial_{(a)}X^A)$ については、(4.26) 式

から以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&(T(\partial_{(a)}X^A)^\dagger\text{の }((r,j),(r',l))\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分})\\
&=(T(\partial_{(a)}X^A)\text{ の }((r',l),(r,j),)\text{ ブロックの }(J,I)\text{ 成分})^*\\
&=T^{(r',r)}\left(\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\omega_{cb}\partial^c X^A\right)^*_{JI}\\
&=\left(\int_M\mu\left(\psi^{\langle r'\rangle}_{J;k}\right)^\dagger\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\omega_{cb}(\partial^c X^A)\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}\right)^*\\
&=\int_M\mu\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}\right)^\dagger\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}\left(C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\right)^*\omega_{cb}(\partial^c X^A)\psi^{\langle r'\rangle}_{J;k}
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

この式の $\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}\left(C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\right)^*$ を評価するために表現行列の性質に着目する。(4.15) 式からベクトル表現の表現行列 $R^{\langle v\rangle}$ と $r'^*$ 表現の表現行列 $R^{\langle r'^*\rangle}$ の積が以下のように書ける。

$$
R^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g)=\sum_{r''}C^{v,r'^*;r''}_{b(a),k(l);i'(j')}R^{\langle r''^*\rangle}_{i'(j')}(g)
\tag{4.35}
$$

この式の両辺に $R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)$ をかけて、群座標 $g$ で積分すると以下のようになる。

$$
\int dgR^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)=\int dg\sum_{r''}C^{v,r'^*;r''}_{b(a),k(l);i'(j')}R^{\langle r''^*\rangle}_{i'(j')}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)
\tag{4.36}
$$

右辺の積分 $\int dgR^{\langle r''^*\rangle}_{i'(j')}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)$ については (2.10) 式の正規直交関係 $\int dgR^{\langle r\rangle}_{ij}(g)^*R^{\langle r'\rangle}_{kl}(g)=\frac{1}{d_r}\delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{ik}\delta_{jl}$ を用いると、(4.36) 式は以下のようになる。

$$
C^{v,r'^*;r}_{b(a),k(l);i(j)}=d_r\int dgR^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)
\tag{4.37}
$$

この式から $\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}\left(C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\right)^*$ ついて以下のように評価することができる。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}\left(C^{v,r^*;r'}_{b(a),(j);(l)}\right)^*&=\sqrt{\frac{d_r}{d_{r'}}}\left(d'_r\right)\int dgR^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g)R^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(g)\Big)^*\\
&=\sqrt{d_rd_{r'}}\int dgR^{\langle v\rangle}_{b(a)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g)\\
&=\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{b(a).k(l);i(j)}
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

この結果を用いると、(4.34) 式は以下のように評価できる。

$$
\begin{aligned}
&(T(\partial_{(a)}X^A)^\dagger\text{の }((r,j),(r',l))\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分})\\
&=\int_M\mu\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}\right)^\dagger\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r';r}_{b(a),k(l);i(j)}\omega_{cb}(\partial^c X^A)\psi^{\langle r'\rangle}_{J;k}\\
&=(T(\partial_{(a)}X^A)\text{ の }((r,j),(r',l))\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分})
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

よって $T(\partial_{(a)}X^A)$ についてもエルミートであり、$T(X^A), T'(X^A), T(\partial_{(a)}X^A)$ はすべてエルミートであることが分かった。これらエルミート性を用いると (4.19) 式で与えられる $\mathcal{P}_{(a)}$ がエルミートであることを示すことができる。(4.19) 式の $\mathcal{P}_{(a)}$ を使って具体的に (4.33) 式を計算してみると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{P}^\dagger_{(a)}T(\varphi), T(\varphi')) \\
&= (T(\varphi), \mathcal{P}_{(a)}T(\varphi')) \\
&= Tr\left(T(\varphi)^\dagger\left(\hbar_p^{-1}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A), T(\varphi')] - \frac{1}{2}\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi')\right)\right) \\
&= \hbar_p^{-1}Tr\left(T(\varphi)^\dagger T(\partial_{(a)}X^A)T(X^A)T(\varphi') - T(\varphi)^\dagger T(\partial_{(a)}X^A)T(\varphi')T'(X^A) - \frac{1}{2}T(\varphi)^\dagger[T(\partial_{(a)}X^A, T(X^A)]T(\varphi')\right) \\
&= \hbar_p^{-1}Tr\left(T(\varphi)^\dagger T(X^A)T(\partial_{(a)}X^A)T(\varphi') - T'(X^A)T(\varphi)^\dagger T(\partial_{(a)}X^A)T(\varphi') + \frac{1}{2}T(\varphi)^\dagger[T(\partial_{(a)}X^A, T(X^A)]T(\varphi')\right) \\
&= \hbar_p^{-1}Tr\left([T(\varphi)^\dagger, T(X^A)]T(\partial_{(a)}X^A)T(\varphi') + \frac{1}{2}T(\varphi)^\dagger[T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi')\right) \\
&= \hbar_p^{-1}Tr\left(\left(T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A), T(\varphi)]\right)^\dagger T(\varphi') - \frac{1}{2}\left([T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi)\right)^\dagger T(\varphi')\right) \\
&= Tr\left(\left(\hbar_p^{-1}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A), T(\varphi)] - \frac{1}{2}\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi)\right)^\dagger T(\varphi')\right) \\
&= (\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi), T(\varphi'))
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

6 行目の等号で $T(X^A), T'(X^A), T(\partial_{(a)}X^A)$ のエルミート性を用いている。よって (4.19) 式の形で定義される $\mathcal{P}_{(a)}$ が、エルミートな線形演算子であることが分かった。

これらの結果をまとめると、BT 量子化を用いて共変微分に対する行列正則化を与えることができ、それは (4.19) 式で与えられる。Toeplitz 演算子の漸近的性質を用いると $p \to \infty$ の極限で、(4.19) 式の 1 項目により共変微分の行列正則化になっている。一方 (4.19) 式の 2 項目については $p \to \infty$ の極限で 0 となるが、$\mathcal{P}_{(a)}$ がエルミートな線形演算子になるために必要な項である。また (4.19) 式の定義の中に含まれる $T(\varphi)$ などの行列については、カットオフ $\Xi$ を導入することで有限サイズの行列になっており、共変微分を有限サイズの行列に正則化することができた。

最後に $\mathcal{P}_{(a)}$ 同士の交換子 $[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]$ について述べる。付録 A から $[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ は以下のように評価される。

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi) \\
&= T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^A)T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_{(a)}X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)T(\varphi) + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

ここで $T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_{(a)}X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}&\left(T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_{(a)}X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)\text{の }((r,j),(r',l))\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分}\right)\\&\equiv\delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}T^{(r,r')}\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\mathbf{1}_{E_r}\right)_{IJ}\end{aligned}\tag{4.42}$$

$G^{\alpha\beta}\equiv g^{\alpha\beta}+iW^{\alpha\beta}$ で、$R^{E_r}_{\beta\gamma}$ は曲率である。

## 4.2 共変微分の有限サイズ行列への正則化

### ($T(\varphi)$ を正方行列に正則化する場合)

前節では共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ を有限サイズの行列へ正則化するために、$\varphi$ を (4.10) 式の形で正則化した。この時カットオフ $\Xi$ を導入し、$T(\varphi)$ のサイズは $\left(\sum_{r\ \text{のカシミヤ}\leq\Xi}d_r dimKerD^{(E_r)}\right)\times\left(dimKerD^{(E_{trivial})}\right)$ となっていて、長方形行列への正則化になっていた。この節では $T(\varphi)$ を正方行列に正則化する方法について述べる。前節の長方形行列の正則化では $T(\varphi)$ が長方形行列のため、共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化を (4.19) 式の形で定義したとき、(4.19) 式のなかの交換子の部分に少し注意が必要であった。(4.19) 式の 1 項目に現れる $[T(X^A),T(\varphi)]$ は $T(\varphi)$ が長方形行列のため一般の交換子ではなく、$[T(X^A),T(\varphi)]=T(X^A)T(\varphi)-T(\varphi)T'(X^A)$ であり、$T(X^A),T'(X^A)$ は (4.22)、(4.23) の形で定義される別の行列であった。しかし $T(\varphi)$ を正方行列へ正則化することで、$[T(X^A),T(\varphi)]$ を一般の交換子のように扱うことができる。

$\varphi$ の正方形行列への正則化を行うために、$\Gamma(E_{reg})\otimes\Gamma(E_{reg})$ の元 $\phi\in\Gamma(E_{reg})\otimes\Gamma(E_{reg})$ を考える。この定義から $\phi$ は群の座標を 2 個引数に持ち、$\phi(x,g_1,g_2)\quad(x\in M,\quad g_1,g_2\in Spin^c(2n))$ と書ける。ここで $\phi$ は $\phi'(x,g_1,g_1^{-1}g_2)$ と見ることもできる。$\phi'$ に 2 章で導入したものと同じ群の作用 $h\in Spin^c(2n)$ を作用させると以下のようになる。

$$\begin{aligned}(\hat{h}\phi')(x,g_1,g_1^{-1}g_2)&=\phi'(x,h^{-1}g_1,(h^{-1}g_1)^{-1}(h^{-1}g_2))\\&=\phi'(x,h^{-1}g_1,g_1^{-1}g_2)\end{aligned}\tag{4.43}$$

この式から $\phi'$ の 2 個目の群の座標については、$h$ について変換されないことが分かる。このことから以下の同型構造が見える。

$$\Gamma(E_{reg}\otimes E_{reg})\simeq\Gamma(E_{reg})\oplus\Gamma(E_{reg})\oplus\cdots\tag{4.44}$$

この同型構造が正方行列に $\varphi$ を正則化する方法のアイデアである。$\phi'$ を前節での方法と同じく Peter-Weyl の定理を用いると以下のように展開できる。

$$\phi'(x,g_1,g_1^{-1}g_2)=\sum_{r'}\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1)\sqrt{d_{r'}}R^{\langle r'\rangle}_{(k)(l)}(g_1^{-1}g_2)\tag{4.45}$$

展開した際の添え字 $k,l$ に括弧がついているのは、(4.43) 式より $g_1^{-1}g_2$ は $Spin^c(2n)$ の変換に対して変換されないことを反映している。よって任意の $r'$ 表現と任意の $(k),(l)$ に対して展開係数 $\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1)$ を以下のように置く。

$$\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1)=\varphi(x,g_1) \tag{4.46}$$

これは同型構造 (4.44) 式において右辺の $\Gamma(E_{reg})$ のすべての元を $\varphi$ とおいたことに等しい。このようにして $\phi\in\Gamma(E_{reg})\otimes\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化を考えることで、前節で見た $\varphi\in\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化と同一視することができる。

ここからは実際に $\phi(x,g_1,g_2)$ を行列正則化していく。そのために前節と同様 Peter-Weyl の定理を用いて以下のように展開できる。

$$\phi(x,g_1,g_2)=\sum_{r,r'}\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}(x)\sqrt{d_r d_{r'}}R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g_2) \tag{4.47}$$

$R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1),R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g_2)$ はそれぞれ $g_1,g_2\in Spin^c(2n)$ の既約表現 $r,r'$ 表現の表現行列である。$Spin^c(2n)$ の変換に対して $\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}(x)$ の添え字 $i,k$ はそれぞれ、$r,r'$ 表現として変換する一方、添え字 $(j),(l)$ について変換する。実際 (4.47) 式の $\phi(x,g_1,g_2)$ で $(j)\to j,(l)\to l$ とし、$h\in Spin^c(2n)$ を作用させると以下のようになる。

$$\begin{aligned}(\hat{h}\phi)(x,g_1,g_2)&=\phi(x,h^{-1}g_1,h^{-1}g_2)\\&=\sum_{r,r'}\tilde{\phi}^{\langle r^*,r'^*\rangle}_{ij,kl}(x)R^{\langle r\rangle}_{ij}(h^{-1}g_1)R^{\langle r'\rangle}_{kl}(h^{-1}g_2)\end{aligned} \tag{4.48}$$

この式の $R^{\langle r\rangle}_{ij}(h^{-1}g_1)R^{\langle r'\rangle}_{kl}(h^{-1}g_2)$ については $r,r'$ がユニタリー表現であることを用いると、以下のように書ける。

$$\begin{aligned}R^{\langle r\rangle}_{ij}(h^{-1}g_1)R^{\langle r'\rangle}_{kl}(h^{-1}g_2)&=R^{\langle r\rangle}_{im}(h^{-1})R^{\langle r\rangle}_{mj}(g_1)R^{\langle r'\rangle}_{kn}(h^{-1})R^{\langle r'\rangle}_{nl}(g_2)\\&=R^{\langle r\rangle *}_{mi}(h)R^{\langle r\rangle}_{mj}(g_1)R^{\langle r'\rangle *}_{nk}(h)R^{\langle r'\rangle}_{nl}(g_2)\end{aligned}$$

これを用いると (4.48) 式は以下のようになる。

$$(\hat{h}\phi)(x,g_1,g_2)=\sum_{r,r'}R^{\langle r\rangle *}_{mi}(h)R^{\langle r'\rangle *}_{nk}(h)\tilde{\phi}^{\langle r^*,r'^*\rangle}_{ij,kl}(x)R^{\langle r\rangle}_{mj}(g_1)R^{\langle r'\rangle}_{nl}(g_2) \tag{4.49}$$

よって添え字 $j,l$ は変換されず、(4.47) 式のように展開することができる。前節で $T(\varphi)$ を求めた時のように、まず (4.47) 式の $\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}$ の正則化を考える。$\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}$ は $r$ 表現と $r'^*$ 表現の直積表現の場なので、$\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}$ に対する Toeplitz 演算子を $T^{\langle r,r'^*\rangle}\left(\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{(j),(l)}(x)\right)$ と書くと、$T^{\langle r,r'^*\rangle}\left(\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{(j),(l)}(x)\right)$ は以下のように与えられる。

$$T^{\langle r,r'^*\rangle}\left(\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{(j),(l)}(x)\right)_{IJ}=\int_M\mu\left(\psi^{\langle r\rangle}_{I;i}(x)\right)^\dagger\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}(x)\psi^{\langle r'\rangle}_{J;k}(x) \tag{4.50}$$

ここで $\psi_{I;i}^{\langle r\rangle}(x)$ は $KerD^{\langle r\rangle}$ の正規直交基底であり、添え字 $I,J$ はそれぞれ $I = 1,\cdots,dimKerD^{\langle r\rangle}, J = 1,\cdots,dimKerD^{\langle r'\rangle}$ の値を取る。この $T^{\langle r,r'^*\rangle}\left(\tilde{\phi}_{(j),(l)}^{\langle r,r'^*\rangle}(x)\right)$ を用いて $\phi$ の行列正則化 $T(\phi)$ は以下のように与えられる。

$$(T(\phi)\text{ の }((r,j),(r',l))\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分}) \equiv T^{(r,r')}\left(\tilde{\phi}_{(j),(l)}^{\langle r,r'^*\rangle}\right)_{IJ} \tag{4.51}$$

$\phi$ は (4.47) 式のように展開されており、(4.47) 式の和 $\sum_{r,r'}$ ではすべての既約表現 $r,r'$ について和が取られているので、このままでは (4.51) 式は無限サイズの行列になっている。前節の場合同様この和にカットオフ $\Xi$ を挿入し、有限サイズの行列とする。直積表現 $r\otimes r'^*$ 表現のカシミヤが $\Xi$ 以下となるような表現に限定し、最後に $\Xi \ll p$ を保ちながら、$\Xi\to\infty$、$p\to\infty$ の極限を取る。このように有限サイズの正方行列として $\phi$ を正則化することができた。この節では $\phi\in\Gamma(E_{reg})\otimes\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化 $T(\phi)$ を考えた。前節では $\varphi\in\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化 $T(\varphi)$ を考え、これらは (4.46) 式で関係づいている。(4.46) 式の両辺を $g_1$ について Peter-Weyl の定理で展開してみる。まず (4.46) 式の左辺 $\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1)$ は以下のように展開できる。

$$\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1) = \sum_r \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x)\sqrt{d_r}R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) \tag{4.52}$$

$Spin^c(2n)$ 群の作用に対して添え字 $i$ は表現 $r$ として変換し、その他括弧付きの添え字については変換されない。一方 (4.46) 式の右辺は以下のように展開できる。

$$\varphi(x,g_1) = \sum_r \tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x)\sqrt{d_r}R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) \tag{4.53}$$

(4.46)、(4.52)、(4.53) 式を用いると、展開係数に対して以下の等式が成り立つ。

$$\tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x) = \tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}(x) \tag{4.54}$$

よって $\tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}$ と $\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{i(j)}$ に関係がついた。この関係から $\phi\in\Gamma(E_{reg})\otimes\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化と $\varphi\in\Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化との間の関係を見ることができる。まずは $\phi(x,g_1,g_2)$ と $\phi'(x,g_1,g_1^{-1}g_2)$ の関係を考える。$\phi'(x,g_1,g_1^{-1}g_2)$ 展開 (4.45) 式に $\tilde{\phi}'^{\langle r'^*\rangle}_{(k)(l)}(x,g_1)$

の展開 (4.52) 式を代入すると以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\phi'(x,g_1,g_2) &= \sum_{r,r'} \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x)\sqrt{d_r d_{r'}} R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{(k)(l)}(g_1^{-1}g_2) \\
&= \sum_{r,r'} \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x)\sqrt{d_r d_{r'}} R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{(k)k'}(g_1^{-1}) R^{\langle r'\rangle}_{k'(l)}(g_2) \\
&= \sum_{r,r'} \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x)\sqrt{d_r d_{r'}} R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) R^{\langle r'^*\rangle}_{k'(k)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{k'(l)}(g_2) \\
&= \sum_{r,r'} \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x)\sqrt{d_r d_{r'}} \sum_{r''} C^{r^*,r'^*;r''}_{i(j),k'(k);m(n)} R^{\langle r''^*\rangle}_{m(n)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{k'(l)}(g_2) \\
&= \sum_{r'',r'} \left( \sum_r \sqrt{\frac{d_r}{d_{r''}}} C^{r^*,r'^*;r''}_{i(j),k'(k);m(n)} \tilde{\phi}'^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),(k)(l)}(x) \right) \sqrt{d_{r''} d_{r'}} R^{\langle r''^*\rangle}_{m(n)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{k'(l)}(g_2) \\
&= \sum_{r,r'} \left( \sum_r \sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{r''^*,r'^*;r}_{m(n),k(k');i(j)} \tilde{\phi}'^{\langle r'',r'^*\rangle}_{m(n),(k')(l)}(x) \right) \sqrt{d_r d_{r'}} R^{\langle r^*\rangle}_{i(j)}(g_1) R^{\langle r'\rangle}_{k(l)}(g_2)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

3 個目の等号では $R^{\langle r'\rangle}_{(k)k'}(g_1^{-1})$ のユニタリー性を用いている。また $C^{r^*,r'^*;r''}_{i(j),k'(k);m(n)}$ は $r^*$ 表現と $r'^*$ 表現を合成した際のクレブッシュゴルダン係数である。この式と (4.47) 式を比較すると展開係数について以下の関係が得られる。

$$\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}(x) = \sum_{r''} \sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{r''^*,r'^*;r}_{m(n),k(k');i(j)} \tilde{\phi}'^{\langle r'',r'^*\rangle}_{m(n),(k')(l)}(x) \tag{4.56}$$

一方 (4.54) 式より、(4.56) 式の右辺の展開係数は以下のように $\tilde{\varphi}$ を用いて書くことができる。

$$\tilde{\phi}^{\langle r,r'^*\rangle}_{i(j),k(l)}(x) = \sum_{r''} \sum_{k'=1}^{d_{r'}} \sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{r''^*,r'^*;r}_{m(n),k(k');i(j)} \tilde{\varphi}^{\langle r''\rangle}_{m(n)}(x) \tag{4.57}$$

この式から $\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化が得られる。$\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ に対する行列正則化したものを $T(\bar{\varphi})$ と書くと、$\bar{T}(\varphi)$ は以下のようになる。

$$(\bar{T}(\varphi) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) = T^{(r,r')} \left( \sum_{r''} \sum_{k'=1}^{d_{r'}} \sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{r''^*,r'^*;r}_{m(n),k(k');i(j)} \tilde{\varphi}^{\langle r''\rangle}_{m(n)} \right)_{IJ} \tag{4.58}$$

このようにして $\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ を正方行列に正則化することができた。

次に $\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ を正方行列に正則化した場合の共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化を考える。この場合の $-i\nabla_{(a)}$ を行列正則化したものを $\bar{P}_{(a)}$ とすると、(4.19) 式と同様に $\bar{P}_{(a)}$ は以下のように与えられる。

$$\bar{\mathcal{P}}_{(a)}\bar{T}(\varphi) = \hbar_p T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),\bar{T}(\varphi)] - \frac{1}{2}\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A),T(X^A)]\bar{T}(\varphi) \tag{4.59}$$

(4.19) 式の場合と違い (4.59) 式では $\bar{T}(\varphi)$ が正方行列である。そのため (4.59) 式に登場する交換子は通常の交換子のように計算ができ、$T(X^A), T(\partial_{(a)}X^A)$ は (4.22)、(4.26) 式で与えられているものと同じ行列である。また (4.59) 式は (4.20) 式と同様に $\bar{\mathcal{P}}_{(a)}\bar{T}(\varphi) =$

$\bar{T}(-i\nabla_{(a)}\varphi) + O\left(\frac{1}{p}\right)$ と評価することができ、その過程は 4.1 節の場合と同じように計算することができる。4.1 節での場合と同様 2 項目は $\bar{\mathcal{P}}_{(a)}$ がエルミートになるために必要な項であり、$p \to \infty$ の極限で $O\left(\frac{1}{p}\right)$ となる。1 項目を計算すると $\bar{T}(-i\nabla_{(a)}\varphi)$ となる。ただしこの時の $\bar{T}(-i\nabla_{(a)}\varphi)$ は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
&(\bar{T}(-i\nabla_{(a)}\varphi) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= T^{(r,r')}\left(\sum_{r''}\sum_{k'}^{d_{r'}}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}}C^{r'',r'^*;r}_{m(n),(k');(j)}\left(-i\sum_{r'''}\sqrt{\frac{d_{r'''}}{d''_r}}C^{v,r'''^*;r''}_{b(a),s(t);m(n)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'''\rangle}_{s(t)}\right)\right)\right)_{IJ} \\
&= T^{(r,r')}\left(-i\sum_{r'',r'''}\sum_{k'}^{d_{r'}}\sqrt{\frac{d_{r'''}}{d_r}}C^{r'',r'^*;r}_{m(n),(k');(j)}C^{v,r'''^*;r''}_{b(a),s(t);m(n)}\left(\nabla_b\tilde{\varphi}^{\langle r'''\rangle}_{s(t)}\right)\right)_{IJ}
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

$\bar{\mathcal{P}}_{(a)}$ のエルミート性についても、(4.40) 式と同様に計算できる。また $[\bar{\mathcal{P}}_{(a)}, \bar{\mathcal{P}}_{(b)}]\bar{T}(\varphi)$ についても 4.1 節の場合と同様に計算でき、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&[\bar{\mathcal{P}}_{(a)}, \bar{\mathcal{P}}_{(b)}]\bar{T}(\varphi) \\
&= T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)\left[T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right), \bar{T}(\varphi)\right] + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

ここで、$T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)$ は (4.42) 式で与えられるものと同じである。

## 4.3 2 次元 $(n = 1)$ の場合

この節では特に簡単な場合として $n = 1$、つまり 2 次元の Kähler 多様体の場合を考える。この場合 2 次元の Kähler 多様体 $M$ は $Spin^c$ 構造ではなく $Spin$ 構造を持ち、特に $Spin(2) \simeq U(1)$ となるため、前節までで考えていた Peter-Weyl の定理による展開の表現行列 $R$ がもはや行列ではなくなり、既約表現のラベルは $U(1)$ チャージにより分類される。以下ではその過程を見ていく。

$M$ を 2 次元の閉じた連結な Kähler 多様体とする。先に述べた通り、この場合 $M$ の構造群は $Spin(2)$ となり、$Spin(2) \simeq U(1)$ となる。そのため Peter-Weyl の定理により $\varphi \in \Gamma(E_{reg})$ を 展開する表現行列は以下のようになる。

$$
R^{\langle s\rangle}(\theta) = e^{2is\theta} \quad (\theta \in [0, 2\pi)) \tag{4.62}
$$

ここで、$s$ は $U(1)$ チャージで整数もしくは半整数の値を持つ。この表現行列を用いて、$\varphi(x,\theta)$ は以下のように展開できる。

$$
\varphi(x,\theta) = \sum_s \tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}(x)e^{-2is\theta} \tag{4.63}
$$

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \vdots \\ T^{\left(s-\frac{1}{2},0\right)}\left(\varphi^{\left\langle s-\frac{1}{2}\right\rangle}\right) \\ T^{(s,0)}\left(\varphi^{\langle s\rangle}\right) \\ T^{\left(s+\frac{1}{2},0\right)}\left(\varphi^{\left\langle s+\frac{1}{2}\right\rangle}\right) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

図 3　行列 $T(\varphi)$ 行列サイズは $\left(\sum_s dimKerD^{(E_s)}\right) \times dimKerD^{(E_0)}$

ここで $\theta \in Spin(2)$ は $Spin(2)$ 群の群座標であり、$s$ についての和はすべての整数、半整数について和が取られている。$\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}(x)$ は $Spin(2)$ のチャージ $s$ を持つ場である。ここで $E_s$ をファイバーが $Spin(2)$、チャージ $s$ を持つファイバー束、$E_0$ をファイバーが $Spin(2)$、チャージ 0 を持つファイバー束とする。この時 $\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}(x)$ は $Hom(E_s, E_0)$ の切断とみなせる。よって $\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}(x)$ の Toeplitz 演算子は以下のように与えられる。

$$T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right)_{IJ} = \int_M \mu \left(\psi_I^{\langle s\rangle}(x)\right)^\dagger \tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}(x)\psi_J^{\langle 0\rangle}(x) \tag{4.64}$$

$\psi_I^{\langle s\rangle}(x)$ はディラック演算子 $D^{E_s}$ のゼロモードの空間 $KerD^{E_s}$ の正規直交基底であり、添え字 $I$ は 1 から $dimKerD^{E_s}$ までの値を取る。$\psi_J^{\langle 0\rangle}(x)$ についても同様で、添え字 $J$ は 1 から $dimKerD^{E_0}$ までの値を取る。この Toeplitz 演算子を用いて $\varphi(x,\theta)$ の Toeplitz 演算子は以下のように与えられる。

$$(T(\varphi) \text{ の } s \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) = T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right)_{IJ} \tag{4.65}$$

行列 $T(\varphi)$ は図 3 のように記述される、行列である。(4.63) 式で $s$ についてすべての整数、半整数について和がとられているため、このままでは (4.65) 式は無限サイズの行列となる。前節までと同様にこの和に関してカットオフ $\Xi$ を挿入して、有限サイズの行列とする。カットオフ $\Xi$ を挿入することで $T(\varphi)$ は $\left(\sum_{|s|\leq\Xi} dimKerD^{(E_s)}\right) \times dimKerD^{(E_0)}$ の長方形行列になる。そして最後に $\Xi \ll p$ を保ちながら、$\Xi \to \infty, p \to \infty$ とする。

続いて $T(-i\nabla_{(\pm)}\varphi)$ について考える。(4.17) 式から $T(-i\nabla_{(\pm)}\varphi)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} &(T(-i\nabla_{(a)}\varphi) \text{ の } s \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\ &= T^{(s,0)}\left(-i\sum_{s'} C^{\pm,s';s}\left(\nabla_\pm \tilde{\varphi}^{\langle s'\rangle}\right)\right)_{IJ} \end{aligned} \tag{4.66}$$

$C^{\pm,s';s}$ は $Spin(2)$ のベクトル表現と $s'$ 表現を合成した場合のクレブッシュゴルダン係数である。$Spin(2)$ の場合ベクトル表現はチャージは $+1$ と $-1$ の表現の直和になっていること

$$T(\mathrm{X}^A) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & 0 \\ & T^{\left(s-\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}\right)}(X^A) & & & \\ & & T^{(s,s)}(X^A) & & \\ & & & T^{\left(s+\frac{1}{2},s+\frac{1}{2}\right)}(X^A) & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

図 4　行列 $T(X^A)$ 図 2 と同様でチャージ $s$ によって表現が指定される

から $C^{\pm,s';s}$ と書いた。(4.37) 式より $C^{\pm,s';s}$ を (4.62) 式の表現行列を使って以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} C^{\pm,s';s} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} R^{\langle\pm\rangle}(\theta) R^{\langle s'^*\rangle}(\theta) R^{\langle s\rangle}(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{\pm 2i\theta} e^{-2is'\theta} e^{2is\theta} \\ &= \delta_{s',s\pm1} \end{aligned} \tag{4.67}$$

よって $T(-i\nabla_{(\pm)}\varphi)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} (T(-i\nabla_{(a)}\varphi) \text{ の } s \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) &= T^{(s,0)} \left( -i \sum_{s'} \delta_{s',s\pm1} \left( \nabla_\pm \tilde{\varphi}^{\langle s'\rangle} \right) \right)_{IJ} \\ &= T^{(s,0)} \left( -i \nabla_\pm \tilde{\varphi}^{\langle s\pm1\rangle} \right)_{IJ} \end{aligned} \tag{4.68}$$

次に埋め込み関数とその微分に関する行列正則化 $T(X^A), T(\partial_\pm X^A)$ について考える。(4.22) 式から埋め込み関数 $X^A$ に対する行列正則化 $T(X^A)$ は、以下のように与えられる。

$$(T(X^A) \text{ の } (s,s') \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv \delta^{\langle s\rangle\langle s'\rangle} T^{(s,s')}(X^A)_{IJ} \tag{4.69}$$

$T(X^A)$ は図 4 のように、非対角ブロックは 0 であり、対角ブロックのみに $X^A$ に対する Toeplitz 演算子を持つ。同様に $T'(X^A)$ についても (4.23) 式から以下のようになる。

$$(T'(X^A) \text{ の } (I,J) \text{ 成分}) \equiv T^{(0,0)}(X^A)_{IJ} \tag{4.70}$$

埋め込み関数の微分 $\partial_{(\pm)}X^A$ に対する行列正則化 $T(\partial_{(\pm)}X^A)$ は (4.26) 式より以下のように与えられる。

$$(T(\partial_{(\pm)}X^A) \text{ の } (s,s') \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv T^{(s,s')} \left( C^{\pm,s'^*;s} \omega_{c\pm} \partial^c X^A \right)_{IJ} \tag{4.71}$$

クレブッシュゴルダン係数 $C^{\pm,s'^*;s}$ については (4.67) 式で計算している。ここでシンプレティック形式 $\omega$ は多脚場 $e$ を用いて、$\omega = e^1 \wedge e^2$ と書ける。このことからシンプレティッ

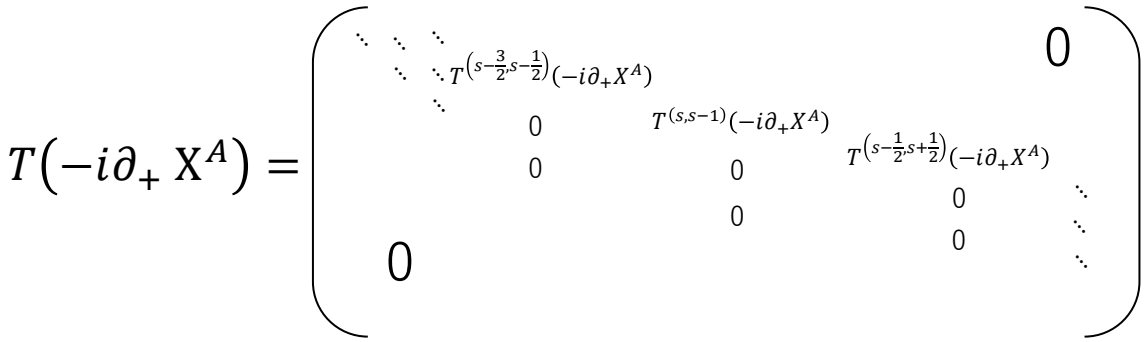



図 5　行列 $T(-i\partial_+X^A)$ $\partial_+$ によってチャージがずれる

ク形式は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}\omega_{ab} &= e_a^\mu e_b^\nu \omega_{\mu\nu} \\ &= e_a^\mu e_b^\nu (e_\mu^1 e_\nu^2 - e_\nu^1 e_\mu^2) \\ &= \delta_a^1\delta_b^2 - \delta_a^2\delta_b^1 \end{aligned} \tag{4.72}$$

よって (4.71) 式は以下のようになる。

$$(T(\partial_{(\pm)}X^A) \text{ の } (s,s') \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \equiv \delta_{s',s\pm1} T^{(s,s\pm1)} \left(\mp i\partial_\pm X^A\right)_{IJ} \tag{4.73}$$

この式から $T(\partial_{(\pm)}X^A)$ は $s$ と $s'$ が 1 つずれたブロックのみに値を持つ行列になっていることが分かり、図 5 のような行列となる。

これらを用いると共変微分 $-i\nabla_{(\pm)}$ の行列正則化は (4.19) 式から次のようになる。

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{(\pm)}T(\varphi) \text{ の } s \text{ ブロック}) = &\mp \hbar_p^{-1} T^{(s,s\pm1)}(\partial_\pm X^A) \left[T(X^A\mathbf{1}), T^{(s\pm1,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\pm1\rangle}\right)\right] \\ &\pm \frac{i}{2}\hbar_p^{-1} \left[T^{(s,s\pm1)}(\partial_\pm X^A), T(X^A\mathbf{1})\right] T^{(s\pm1,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\pm1\rangle}\right)\end{aligned} \tag{4.74}$$

ここで登場している交換子は通常の交換子ではなく、4.1 節で導入した一般化した交換子である。4.1 節での計算と同じように 1 項目を計算すると $p\to\infty$ で $\mathcal{P}_{(\pm)}T(\varphi) = T(-i\nabla_{(\pm)}\varphi) + O\left(\frac{1}{p}\right)$ となることが示せる。また 2 項目については $p\to\infty$ で $O\left(\frac{1}{p}\right)$ となり、$\mathcal{P}_{(\pm)}$ がエルミートになるために必要な項となる。また $\mathcal{P}_{(\pm)}$ の交換子 $[\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]T(\varphi)$ については (4.41) 式から以下のようになる。

$$\begin{aligned}&([\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]T(\varphi) \text{ の } s \text{ ブロック}) \\ &= T^{(s,s+1)}(\partial_+X^A)T^{(s+1,s)}(\partial_-X^B) \\ &\quad \times T^{(s,s)}\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right) T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= T^{(s,s)}\left((\partial_+X^A)(\partial_-X^B)(-1)R^{E_r}_{12}W^{ab}(\partial_aX^A)(\partial_bX^B)\right) T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right)\end{aligned} \tag{4.75}$$

ここで $R^{E_r}_{12} = e_1^\beta e_2^\gamma R^{E_r}_{\beta\gamma} = e_1^\beta e_2^\gamma \left(\partial_\beta A^{E_s}_\gamma - \partial_\gamma A^{E_s}_\beta\right)$ でポワッソンテンソル $W^{ab}$ は $W^{12}=1$ の反対称テンソルである。

以上の議論は 4.2 節での考察から、$\varphi$ を正方行列に正則化した場合にも考えることができる。その場合 (4.74) 式とは違い、交換子は通常の交換子で与えられる。

次節以降ではこれまでの共変微分の行列正則化を、具体的な多様体 $S^2$、$T^{2n}$ に対して適用し考察していく。

## 4.4 具体例: $S^2$

この節では前節までの共変微分の行列正則化を $S^2$ の場合、具体的にどのようになるかを考察していく。

まずは 2 次元球面 $S^2$ の定義を与える。ここでは実 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた $S^2$ を考える。2.4 節と同様に $S^2$ の北極点から $X^1 - X^2$ 平面への立体射影を考え、その立体射影座標を $(z, \bar{z})$ とすると、$\mathbb{R}^3$ への埋め込み関数 $X^A (A = 1, 2, 3)$ は、以下のように与えられる。

$$X^1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad X^2 = -i\frac{z - \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad X^3 = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \tag{4.76}$$

この時計量と二脚場は 2.4 節と同様に以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &= g_{\bar{z}z} = \frac{2}{(1 + |z|^2)^2}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \\ e^1 &= \frac{dz + d\bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad e^2 = -i\frac{dz - d\bar{z}}{1 + |z|^2} \end{aligned} \tag{4.77}$$

またこの二脚場の逆は以下のように与えられる。

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + |z|^2)(\partial_z + \partial_{\bar{z}}), \quad e_2 = \frac{i}{2}(1 + |z|^2)(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \tag{4.78}$$

スピン接続 $\Omega$ は 2.4 節と同様に次のようになる。

$$\Omega^{12} = -i\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1 + |z|^2} \tag{4.79}$$

シンプレティック形式 $\omega$ は以下のように与えられる。

$$\omega = i\sqrt{detg}dz \wedge d\bar{z} = i\frac{2}{(1 + |z|^2)^2}dz \wedge d\bar{z} \tag{4.80}$$

このシンプレティック形式は 2 次元、つまり $n = 1$ の場合に限り体積形式 $\mu$ と等しい。このシンプレティック形式を使って体積 $V$ を計算すると以下のように計算できる。

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} \omega = 2 \tag{4.81}$$

また (3.2) 式で登場した定数 $k$ については以下のように選ぶことができる。

$$k = \frac{2\pi}{\int_{S^2} \omega} = \frac{1}{2} \tag{4.82}$$

次に複素直線束 $L$ の接続 1 形式として、以下で与えられる Wu-Yang モノポール配位を導入する。

$$A^L = -\frac{1}{2}\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1+|z|^2} \tag{4.83}$$

この $A^L$ は $R^L = dA^L = -ik\omega$ の関係を満たしている。次にファイバー束 $E_s, E_{s'}$ の接続 1 形式 $A^{E_s}, A^{E_{s'}}$ を以下のように与える。

$$A^{E_s} = -is\omega^{12}, \quad A^{E_{s'}} = -is'\omega^{12} \tag{4.84}$$

ここで $E_s, E_{s'}$ はそれぞれそのファイバーが $Spin(2)$ のチャージ $s, s'$ を持つファイバー束である。

次に $\Gamma(S \otimes L^{\otimes p} \otimes E_s)$ に作用するディラック方程式のゼロモードについて考える。3.1 節と同様にディラック方程式のゼロモード $\psi$ を以下のように書く。

$$\psi = f\,|+\rangle \quad (f \in \Gamma(L^{\otimes p} \otimes E_s)) \tag{4.85}$$

3.1 節から (3.15) 式を考えればいい。ただし 3.1 節では $Spin^c$ 束を考えていたが、今回の場合は $Spin$ 束なので、以下の微分方程式を考えればよい。

$$\left(\partial_{\bar{\mu}} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\Omega_{m\bar{m}\bar{\mu}} + pA^L_{\bar{\mu}} + A^E_{\bar{\mu}}\right) f = 0 \tag{4.86}$$

(4.79)、(4.83)、(4.84) 式をこの式に代入すると以下のようになる。

$$\left(\partial_{\bar{z}} + \frac{(p+2s-1)z}{2(1+|z|^2)}\right) f = 0 \tag{4.87}$$

この方程式から解 $f$ を得ることができ、ゼロモード $\psi$ は以下のようになる。

$$\psi_I(z,\bar{z}) = f_I(z,\bar{z}) \tag{4.88}$$

$$f_I(z,\bar{z}) = \sqrt{\frac{p+2s}{4\pi}}\binom{p+2s-1}{I}^{\frac{1}{2}} \frac{z^I}{(1+|z|^2)^{\frac{p+2s-1}{2}}} \tag{4.89}$$

添え字 $I$ は 0 から $p+2s-1$ までの値をとり、ゼロモードを区別する足となる。

ここからは得られたゼロモード (4.88) 式を用いて、埋め込み関数 $X^A$ に対する Toeplitz 演算子 $T(X^A)$ を計算していく。$T(X^A)$ は (4.22) 式で与えられている。$X^+ \equiv X^1 + iX^2, X^- \equiv X^1 - iX^2$ とし、(4.88) 式を用いるとこれらの Toeplitz 演算子 $T(X^+), T(X^-), T(X^3)$ を計算するとそれぞれ以下のようになる。

$$T^{(s,s)}(X^+)_{IJ} = \frac{2}{p+2s-1}\sqrt{I(p+2s-1)}\delta_{I-1,J} \tag{4.90}$$

$$T^{(s,s)}(X^-)_{IJ} = \frac{2}{p+2s-1}\sqrt{(I+1)(p+2s-I-1)}\delta_{I+1,J} \tag{4.91}$$

$$T^{(s,s)}(X^3)_{IJ} = \frac{p+2s-2I-1}{p+2s-1}\sqrt{I(p+2s-1)}\delta_{I,J} \tag{4.92}$$

ここでの添え字 $I, J$ についても 0 から $p+2s-1$ までの値をとる。これらの Toeplitz 演算子の計算では以下のガンマ関数についての積分公式を用いた。

$$\frac{1}{2\pi}\int idzd\bar{z}\frac{z^a\bar{z}^b}{(1+|z|^2)^c}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(c-a-1)}{\Gamma(c)}\delta_{ab} \tag{4.93}$$

(4.90)〜(4.92) 式の埋め込み関数に対する Toeplitz 演算子は $\mathfrak{su}(2)$ リー代数を満たし、非可換球面を表す行列である。

$$[T^{(s,s)}(X^A),T^{(s,s)}(X^B)]=-\frac{2}{p+2s+1}i\epsilon^{ABC}T^{(s,s)}(X^C) \tag{4.94}$$

次に $\partial_\pm X^A$ の Toeplitz 演算子 $T(\partial_\pm X^A)$ を計算していく。$T(\partial_\pm X^A)$ は (4.26) 式で与えられている。$T(\partial_\pm X^A)$ については微分 $\partial_\pm$ によって非ゼロとなるブロックが対角成分から $\mp 1$ だけずれる。積分公式 (4.93) 式を再び用いると、$T(\partial_\pm X^A)$ はそれぞれ以下のように計算できる。

$$T^{(s-1,s)}(\partial_+X^+)_{IJ}=\sqrt{\frac{(p+2s-I-1)(p+2s-I-2)}{(p+2s)(p+2s-1)}}\delta_{I,J} \tag{4.95}$$

$$T^{(s-1,s)}(\partial_+X^-)_{IJ}=-\sqrt{\frac{(I+1)(I+2)}{(p+2s)(p+2s-1)}}\delta_{I+2,J} \tag{4.96}$$

$$T^{(s-1,s)}(\partial_+X^3)_{IJ}=-\sqrt{\frac{(I+1)(p+2s-I-2)}{(p+2s)(p+2s-1)}}\delta_{I+1,J} \tag{4.97}$$

$$T^{(s+1,s)}(\partial_-X^+)_{IJ}=-\sqrt{\frac{I(I-1)}{(p+2s+2)(p+2s+1)}}\delta_{I-2,J} \tag{4.98}$$

$$T^{(s+1,s)}(\partial_-X^+)_{IJ}=\sqrt{\frac{(p+2s-I+1)(p+2s-I)}{(p+2s+2)(p+2s+1)}}\delta_{I,J} \tag{4.99}$$

$$T^{(s+1,s)}(\partial_-X^3)_{IJ}=-\sqrt{\frac{I(p+2s-I+1)}{(p+2s+2)(p+2s+1)}}\delta_{I-1,J} \tag{4.100}$$

ここで (4.95)〜(4.97) 式に対して添え字 $I$ は 0 から $p+2s-3$ まで、添え字 $J$ は 0 から $p+2s-1$ までの値をとる。一方 (4.98)〜(4.100) 式については添え字 $I$ は 0 から $p+2s+1$ まで、添え字 $J$ は 0 から $p+2s-1$ までの値をとる。

ここまでの計算で得られた $T(X^A), T(\partial_\pm X^A)$ を (4.19) 式に代入することで $S^2$ 上の共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化 $\mathcal{P}_{(a)}$ を得ることができる。$\mathcal{P}_{(a)}$ 同士の交換関係 $[\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]$ について考える。(4.41) 式から以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}&([\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]T(\varphi)\text{ の }s\text{ ブロック})\\&=isT^{(s,s)}\left((\partial_+X^A)(\partial_-X^B)W^{ab}(\partial_aX^A)(\partial_bX^B)\right)T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right)+O\left(\frac{1}{p}\right)\end{aligned} \tag{4.101}$$

ここで $S^2$ の場合 $R^{E_s}=dA^{E_s}=-isd\Omega_{12}=2sdA^L=-is\omega$ と計算でき、ここから $R^{E_s}_{12}=-is$ であることを用いている。(4.101) 式の $(\partial_+X^A)(\partial_-X^B)W^{ab}(\partial_aX^A)(\partial_bX^B)$ に

ついては以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}(\partial_+X^A)(\partial_-X^B)W^{ab}(\partial_aX^A)(\partial_bX^B) &= (\partial_+X^A)(\partial_-X^B)W^{-+}(\partial_-X^A)(\partial_+X^B)\\ &= W^{-+}\delta_{+-}\delta_{+-}\\ &= \frac{i}{2}\end{aligned} \tag{4.102}$$

この計算では $\delta_{++}=\delta_{--}=0, \delta_{+-}=\delta_{-+}=\frac{1}{2}$ を用いている。(4.102) 式を (4.101) 式に代入すると、以下のように評価できる。

$$([\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]T(\varphi)\text{ の }s\text{ ブロックの }(I,J)\text{ 成分}) = -\frac{s}{2}T^{(s,0)}\left(\tilde{\varphi}^{\langle s\rangle}\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{4.103}$$

この式から $[\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]$ を $T(\varphi)$ に作用させることで、場のチャージ $s$ が比例係数にでてくることが分かる。実際このチャージ $s$ は局所ローレンツ生成子 $\mathcal{O}_{+-}$ の固有値になっている。そこで $\mathcal{P}_3 \equiv [\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}]$ と定義し $[\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_{(\pm)}]$ を計算すると以下のようになる。

$$[\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_{(\pm)}]T(\varphi) = \pm\frac{1}{2}\mathcal{P}_{(\pm)}T(\varphi) + O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{4.104}$$

この計算から $p\to\infty$ の極限で $\mathcal{P}_{(\pm)},\mathcal{P}_3$ が $\mathfrak{su}(2)$ リー代数を満たすことが分かる。

$$[\mathcal{P}_{(+)},\mathcal{P}_{(-)}] = \mathcal{P}_3 \tag{4.105}$$

$$[\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_{(\pm)}] = \pm\frac{1}{2}\mathcal{P}_{(\pm)} \tag{4.106}$$

この結果は 2 章でレビューした行列の共変微分解釈での $S^2$ における結果、(2.37) 式を再現している。

## 4.5 具体例: $T^{2n}$

この節では 2 つ目の具体例として、$2n$ 次元トーラス $T^{2n}$ 上の共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化 $\mathcal{P}_{(a)}$ について考える。

まずは $2n$ 次元トーラス $T^{(2n)} \cong (S^1)^{2n}$ の定義を与える。平坦計量を持つ $2n$ 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ 上において、以下のように同値関係を定める。

$$\forall x=(x^1,x^2,\cdots,x^{2n})\in\mathbb{R}^{2n} : x^a \sim x^a + 2\pi l_a \quad (a=1,2,\cdots,2n) \tag{4.107}$$

$l_a$ は正の定数である。この同値関係を用いて $T^{2n}$ を以下のような商空間で定義する。

$$T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\sim \tag{4.108}$$

$T^{2n}$ 上の平坦計量と Kähler 形式は以下のように与えられる。

$$g = \sum_{a=1}^{2n} dx^a\otimes dx^a, \quad \omega = \sum_{m=1}^{n} dx^{2m-1}\wedge dx^{2m} = idz^\mu\wedge d\bar{z}^\mu \tag{4.109}$$

ここで $z$ は複素座標であり、実座標 $x$ とは $\mu = 1, 2, \cdots, n$ に対して $z^\mu = (x^{2\mu-1} + ix^{2\mu})/\sqrt{2}$ という関係にある。このように定義される $T^{2n}$ は平坦な $4n$ 次元のユークリッド空間 $\not\subseteq\times$ に isometric に埋め込むことができ、その埋め込み座標 $X$ は以下のようになる。

$$X^{2a-1} = l_a cos(x^a/l_a), \quad X^{2a} = l_a sin(x^a/l_a) \quad (a = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{4.110}$$

次に $T^{2n}$ 上のバンドル構造について考える。$T^{2n}$ はスピン多様体なので、$Spin^c$ 束ではなく $Spin$ 束で考えることができる。また $S^2$ の場合とは違い $T^{2n}$ は平坦なので $Spin$ 束 $S$ のスピン接続は 0 になる。また複素直線束 $L$ の曲率 $R^L$ については、(3.2) 式のように $R^L = -\frac{k}{2}(\partial - \bar{\partial})K$ で与えられる。$T^{2n}$ 上に 2-cycle は $T^2$ となり、この曲率 $R^L$ は $m = 1, 2, \cdots n$ に対して、$(x^{2m-1}, x^{2m})$ で記述される $T^2$ 上でのみ非ゼロの値を持つ。また定数 $k$ について 3.1 節で述べた条件を考えると、$k$ と $l_a$ について以下の条件がつく。

$$\forall m \in \{1, 2, \cdots, n\} : \quad q_m \equiv \frac{i}{2\pi}\int_{T^2} R^L = 2\pi k l_{2m-1} l_{2m} \in \mathbb{N} \tag{4.111}$$

この条件は任意の $m, m'$ に対してその面積の商 $\frac{l_{2m-1}l_{2m}}{l_{2m'-1}l_{2m'}}$ が有理数になることと等価である。

次に $T^{2n}$ 上の $\Gamma(S \otimes L^{\otimes p} \otimes E_r)$ に作用するディラック方程式とそのゼロモードについて考える。ここで $E_r$ は $Spin(2n)$ の既約表現 $r$ の空間をファイバーとするファイバー束である。(3.11) 式のようにディラック方程式の解 $\psi$ を $\psi = f^{(p)} |+\rangle^{\otimes n}$ ($f^{(p)} \in \Gamma(L^{\otimes p} \otimes E_r)$ のように書くと、解くべき方程式は以下のように単純化される。

$$(\partial_{\bar{\mu}} + pA^L_{\bar{\mu}}) f^{(p)} = 0 \tag{4.112}$$

複素直線束 $L$ の接続 1 形式 $A^L$ は以下のような形を導入する。

$$A^L = -ik \sum_{m=1}^{n} x^{2m-1} dx^{2m} = -\frac{k}{2}(z^\mu + \bar{z}^\mu)(dz^\mu - d\bar{z}^\mu) \tag{4.113}$$

実際この $A^L$ は $R^L = dA^L = -ik\omega$ を満たしている。この $A^L$ を (4.112) 式に代入すると、解くべき微分方程式は以下のようになる。

$$\left(\partial_{\bar{\mu}} + \frac{kp}{2}(z^\mu + \bar{z}^\mu)\right) f^{(p)} = 0 \tag{4.114}$$

この微分方程式を解く上で、境界条件に注意しなければならない。$f^{(p)}$ は非自明な線束 $L^{\otimes p}$ の切断なので、当然座標変換を受ける。$x^{2m} \mapsto x^{2m} + 2\pi l_{2m}$ の座標変換を考えると、この変換では (4.113) 式より $A^L(x)$ は変わらない。つまりこの変換では $f^{(p)}$ も不変であるべきである。一方 $x^{2m-1} \mapsto x^{2m-1} + 2\pi l_{2m-1}$ の座標変換を考えると、$A^L(x)$ は $A^L(x) \mapsto A^L(x) - d\lambda(x)$ と変換する。($\lambda(x) = i2\pi k l_{2m-1} x^{2m}$) このことから $f^{(p)}$ はそれぞれの $m$ に対して、$f^{(p)}(x) \mapsto e^{p\lambda(x)} f^{(p)}(x) = e^{i2\pi k p l_{2m-1} x^{2m}} f^{(p)}(x)$ のように変換するべきである。これらの境界条件と (4.114) 式を満たす一般解を以下のように与える。

$$f^{(p)}(x) = \prod_{m=1}^{n} \left( e^{-\frac{kp}{2}(x^{2m-1})^2} \phi_m(x^{2m-1} + ix^{2m}) \right) \tag{4.115}$$

境界条件については $\phi_m$ 押し付けることで以下のような条件になる。

$$\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m}+i2\pi l_{2m})=\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m}) \tag{4.116}$$

$$\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m}+i2\pi l_{2m-1})=e^{i\pi pq_m\tau_m}e^{pq_m(x^{2m-1}+ix^{2m})/l_{2m}}\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m}) \tag{4.117}$$

ここで $\tau_m\equiv il_{2m-1}/l_{2m}$ は $m$ 番目の $T^2$ のモジュライパラメータである。(4.116) 式の条件から $\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m})$ は以下のように書ける。

$$\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m})=\sum_{s\in\mathbb{Z}}d_s e^{s(x^{2m-1}+ix^{2m})/l_{2m}} \tag{4.118}$$

$d_s$ は複素定数である。(4.117) 式の条件から $d_s$ についての条件が以下のようになる。

$$d_s=e^{i\pi(2s-pq_m)\tau_m}d_{s-pq_m} \tag{4.119}$$

この条件式を解くために、$l\in\mathbb{Z}$ と $i_m\in\{0,1,\cdots,pq_m-1\}$ に対して $s=pq_ml+I_m$ と書くと (4.119) 式の解は以下の形で書ける。

$$d_{pq_ml+I_m}=c^{(p)}_{I_m}e^{i\pi\left(l+\frac{I_m}{pq_m}\right)^2pq_m\tau_m} \tag{4.120}$$

$c^{(p)}_{I_m}$ は複素定数である。したがって (4.116)、(4.117) 式を満たす線形独立な解は $pq_m$ 個あり、以下のように与えられる。

$$\phi_m(x^{2m-1}+ix^{2m})=\sum_{I_m=0}^{pq_m-1}c^{(p)}_{I_m}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{i\pi\left(l+\frac{I_m}{pq_m}\right)^2pq_m\tau_m}e^{\left(l+\frac{I_m}{pq_m}\right)\frac{pq_m}{l_{2m}}(x^{2m-1}+ix^{2m})} \tag{4.121}$$

これらからディラック方程式のゼロモードの正規直交基底 $\psi$ を以下のように書くことができる。

$$\psi_{(I,I')}(x)=f^{(p)}_I(x)\,|+\rangle^{\otimes n}\,|r,I'\rangle \tag{4.122}$$

添え字 $I$ は $I=(I_1,I_2,\cdots,I_n)$ を表し、$I'$ については 1 から $d_r$ までの値をとる。$f^{(p)}_I(x)$ については以下のように与えられる。

$$f^{(p)}_I(x)=\prod_{m=1}^{n}f^{(p)}_{I_m}(x^{2m-1},x^{2m}) \tag{4.123}$$

添え字 $I_m$ はゼロモードを区別する足であり、0 から $pq_m-1$ までの値を取る。$f^{(p)}_{I_m}(x^{2m-1},x^{2m})$ は以下のように書ける。

$$f^{(p)}_{I_m}(x^{2m-1},x^{2m})=\left(\frac{kp}{4\pi^3l_{2m}}{}^2\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{kp}{2}(x^{2m-1})^2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{i\pi\left(l+\frac{I_m}{pq_m}\right)^2pq_m\tau_m}e^{\left(l+\frac{I_m}{pq_m}\right)\frac{pq_m}{l_{2m}}(x^{2m-1}+ix^{2m})} \tag{4.124}$$

(4.112) 式の基底 $|r,I'\rangle$ については $E_r$ のファイバーの正規直交基底であり、添え字 $I'$ は 1 から $d_r$ の値を取る。この解の構成から $T^{2n}$ 上の $\Gamma(S\otimes L^{\otimes p}\otimes E_r)$ に作用するディラック演算子のゼロモードは添え字 $(I,I')$ の組によって指定される。

次に $T^{2n}$ の $\mathbb{R}^{4n}$ への埋め込み関数 $X^A$ の行列正則化 $T(X^A)$ について考える。そのため $T^{2n}$ 上の以下のよな関数を導入する。

$$u_m = e^{ix^{2m-1}/l_{2m-1}}, \quad v_m = e^{ix^{2m}/l_{2m}} \tag{4.125}$$

この関数を用いると (4.110) 式の埋め込み関数は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} X^{4m-3} &= \frac{l_{2m-1}}{2}(u_m + u_m^*), \quad X^{4m-2} = \frac{l_{2m-1}}{2i}(u_m - u_m^*) \\ X^{4m-1} &= \frac{l_{2m}}{2}(v_m + v_m^*), \quad X^{4m} = \frac{l_{2m}}{2i}(v_m - v_m^*) \end{aligned} \tag{4.126}$$

これらの埋め込み関数に対する行列正則化は (4.22) 式より、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} &(T(X^A) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } ((I,I'),(J,J')) \text{ 成分}) \\ &= \delta_{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}T^{(r,r)}(X^A\mathbf{1}_{E_r})_{(I,I'),(J,J')} \\ &= \delta_{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}\delta_{I'J'}\int_{T^{2n}}\mu\left(f_I^{(p)}\right)^* X^A f_J^{(p)} \\ &= \delta_{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}\delta_{I'J'}T^{(1,1)}(X^A)_{IJ} \end{aligned} \tag{4.127}$$

最後の等号では $T^{(1,1)}(X^A)_{IJ} \equiv \int_{T^{2n}}\mu\left(f_I^{(p)}\right)^* X^A f_J^{(p)}$ と定義した。ここで $T^{(1,1)}(X^A)_{IJ}$ を計算するために以下の公式を用いる。

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi l_{2m-1}} dx^{2m-1}\int_0^{2\pi l_{2m}} dx^{2m}\left(f_{I_m}^{(p)}\right)^* e^{i\frac{ax^{2m-1}}{l_{2m-1}}}e^{i\frac{bx^{2m}}{l_{2m}}}f_{J_m}^{(p)} \\ &= e^{-\frac{1}{4kp}\left(\frac{a^2}{l_{2m-1}^2}+i\frac{2ab}{l_{2m-1}l_{2m}}+\frac{b^2}{l_{2m}^2}\right)}e^{i\frac{2\pi a I_m}{pq_m}}\delta_{I_m-J_m-b,0}^{(mod\, pq_m)} \end{aligned} \tag{4.128}$$

この公式において $a, b \in \mathbb{Z}$ で、$\delta_{a,b}^{(mod\, n)}$ は以下のように定義される。

$$\delta_{a,b}^{(mod\, n)} \equiv \begin{cases} 1 & a-b \in n\mathbb{Z} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{4.129}$$

この公式を用いて (4.126) 式の埋め込み関数に対する $T^{(1,1)}(X^A)_{IJ}$ を計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} T^{(1,1)}(X^{4m-3})_{IJ} &= \frac{l_{2m-1}}{2}\left(U_m^{(p)} + U_m^{(p)\dagger}\right)_{IJ}, \quad T^{(1,1)}(X^{4m-2})_{IJ} = \frac{l_{2m-1}}{2i}\left(U_m^{(p)} - U_m^{(p)\dagger}\right)_{IJ} \\ T^{(1,1)}(X^{4m-1})_{IJ} &= \frac{l_{2m}}{2}\left(V_m^{(p)} + V_m^{(p)\dagger}\right)_{IJ}, \quad T^{(1,1)}(X^{4m})_{IJ} = \frac{l_{2m}}{2i}\left(V_m^{(p)} - V_m^{(p)\dagger}\right)_{IJ} \end{aligned} \tag{4.130}$$

この式の $U_m^{(p)}$ と $V_m^{(p)}$ については以下のように与えられる行列である。

$$\left(U_m^{(p)}\right)_{IJ} = (U_{pq_m})_{I_mJ_m}\prod_{1\le k\le n,\, k\neq m}\delta_{I_kJ_k} \tag{4.131}$$

$$\left(V_m^{(p)}\right)_{IJ} = (V_{pq_m})_{I_mJ_m}\prod_{1\le k\le n,\, k\neq m}\delta_{I_kJ_k} \tag{4.132}$$

$U_{pq_m}, V_{pq_m}$ はクロックシフト行列で以下のような行列である。

$$U_{pq_m} = e^{-\frac{1}{4kpl_{2m-1}^2}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{i\frac{2\pi}{pq_m}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\frac{2(pq_m-1)\pi}{pq_m}} \end{pmatrix} \tag{4.133}$$

$$V_{pq_m} = e^{-\frac{1}{4kpl_{2m}^2}} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \tag{4.134}$$

このクロックシフト行列 $U_{pq_m}, V_{pq_m}$ はトフーフトワイル代数 $U_{pq_m}V_{pq_m} = e^{i\frac{2\pi}{pq_m}}V_{pq_m}U_{pq_m}$ を満たす行列である。次に埋め込み関数の微分 $\partial_{(a)}X^A$ に対する行列正則化 $T(\partial_{(a)}X^A)$ について考える。$T(\partial_{(a)}X^A)$ は (4.26) 式より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
&(T(\partial_{(a)}X^A) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } ((I,I'),(J,J')) \text{ 成分}) \\
&= T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'*;r}_{b(a),(l);(j)}\omega_{cb}\partial^c X^A\right)_{(I,I'),(J,J')} \\
&= \int_{T^{2n}}\mu \sum_{I'',J''}\delta_{I',I''}\left(f_I^{(p)}\right)^*\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'*;r}_{b(a),J''(l);I''(j)}\omega_{cb}\partial^c X^A f_J^{(p)}\delta_{J',J''} \\
&= \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'*;r}_{b(a),J'(l);I'(j)}\omega_{cb}\int_{T^{2n}}\mu\left(f_I^{(p)}\right)^*\partial^c X^A f_J^{(p)} \\
&= \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'*;r}_{b(a),J'(l);I'(j)}\omega_{cb}T^{(1,1)}(\partial^c X^A)_{IJ}
\end{aligned} \tag{4.135}$$

最後の等号では $T^{(1,1)}(\partial^c X^A)_{IJ} \equiv \int_{T^{2n}}\mu\left(f_I^{(p)}\right)^*\partial^c X^A f_J^{(p)}$ と定義した。$\partial^c X^A$ については (4.126) 式から以下のようになる。

$$\partial^c X^A = \begin{cases} -\frac{1}{l_c}X^{2c} & A = 2c-1 \\ \frac{1}{l_c}X^{2c-1} & A = 2c \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{4.136}$$

これらを用いて $T(\partial_{(a)}X^A)$ は以下のようになる。

$$(T(\partial_{(a)}X^A) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } ((I,I'),(J,J')) \text{ 成分}) \tag{4.137}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{2m(a),J'(l);I'(j)} \left(-\frac{1}{l_{2m-1}}\right) T^{(1,1)}(X^{4m-2})_{IJ} & A = 4m-3 \\ \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{2m(a),J'(l);I'(j)} \frac{1}{l_{2m-1}} T^{(1,1)}(X^{4m-3})_{IJ} & A = 4m-2 \\ \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{2m-1(a),J'(l);I'(j)} \frac{1}{l_{2m}} T^{(1,1)}(X^{4m})_{IJ} & A = 4m-1 \\ \sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}} C^{v,r'^*;r}_{2m-1(a),J'(l);I'(j)} \left(-\frac{1}{l_{2m}}\right) T^{(1,1)}(X^{4m-1})_{IJ} & A = 4m \end{cases} \tag{4.138}$$

ここで求めた $T(X^A), T(\partial_{(a)}X^A)$ を用いて (4.19) 式で与えた共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化 $\mathcal{P}_{(a)}$ について考える。(4.131),(4.132) 式で与えた行列 $U_m^{(p)}$ と $V_m^{(p)}$ はそれぞれ $[U_m^{(p)}, U_m^{(p)\dagger}] = 0, [V_m^{(p)}, V_m^{(p)\dagger}] = 0$ を満たす。このことから $T^{(1,1)}(X^A)$ について $[T^{(1,1)}(X^{4m-3}), T^{(1,1)}(X^{4m-2})] = [T^{(1,1)}(X^{4m-1}), T^{(1,1)}(X^{4m})] = 0$ となる。このことから $T(\partial_{(a)}X^A)T(X^A) = T(X^A)T(\partial_{(a)}X^A) = 0$ となる。よって $T^{2n}$ 上での $\mathcal{P}_{(a)}$ は以下のようになる。

$$\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi) = \hbar_p^{-1} T(\partial_{(a)}X^A)T(\varphi)T'(X^A) \tag{4.139}$$

ここで 4.1 節で述べたように $T'(X^A)$ は $X^A$ の行列正則化であるが、$T(X^A)$ とはサイズが異なる行列である。次に $\mathcal{P}_{(a)}$ の交換子 $[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]$ について考えると、$T^{2n}$ は平坦なため $R^{E_r}_{\beta\gamma} = 0$ であり、(4.41) 式から以下のように評価できる。

$$[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi) = O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{4.140}$$

よって $p \to \infty$ で $[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}] = 0$ となり、これは $T^{2n}$ の平坦性を反映しており、2 章での結果を再現している。

# 5　結論と展望

本論文では、$2n$ 次元の Kähler 多様体 $M$ を考え、$M$ 上の関数 (場)$\varphi$ に作用する共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ に対応する行列を、有限サイズの行列に正則化する手法を与えた。

共変微分の有限サイズ行列への正則化 $\mathcal{P}_{(a)}$ は、以下の形で与えられる。

$$\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi) = \hbar_p T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A), T(\varphi)] - \frac{1}{2}\hbar_p^{-1}[T(\partial_{(a)}X^A), T(X^A)]T(\varphi) \tag{5.1}$$

ここで $\hbar_p = \frac{1}{kp}$ である。またこの式中の $X^A$ は、多様体 $M$ を、より高次元なユークリッド空間に埋め込んだ際の埋め込み関数であり、$T(X^A), T(\partial_{(a)}X^A)$ は、それぞれ $X^A$ と $\partial_{(a)}X^A$ を BT 量子化して得られる、Toeplitz 演算子である。(5.1) 式から $\mathcal{P}_{(a)}$ は、$\varphi$ の Toeplitz 演算子 $T(\varphi)$ に作用する線形演算子として与えられる。(5.1) 式は、3 章で見た Toeplitz 演算子の漸近的性質を用いると、次のようになる。

$$\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi) = T(-i\nabla_{(a)}\varphi) + O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{5.2}$$

よって (5.1) 式で構成した $\mathcal{P}_{(a)}$ は、$\varphi$ に作用する共変微分 $-i\nabla_{(a)}$ の行列正則化である。さらに $T(\varphi), T(X^A)$ などは、有限サイズの行列であったため、$\mathcal{P}_{(a)}$ も有限サイズの行列である。よって本論文が (5.1) 式で定義した $\mathcal{P}_{(a)}$ が、共変微分の有限サイズ行列への正則化である。そして実際に具体例として 2 次元球面 $S^2$ と $2n$ 次元トーラス $T^{2n}$ の場合について正則化を行い、行列のサイズが無限大となる極限において、2 章で見た共変微分解釈の結果を再現することを見た。

この方法により有限サイズ行列として共変微分の行列正則化が得られたので、この結果を行列模型の数値シミュレーションに、応用することが期待される。これらの数値シミュレーションを用いて、具体的な量子効果の計算を行うことができる。この量子効果の計算は、超弦理論と行列模型との対応を考える上では、非常に重要である。本論文の結果によって、超弦理論の非摂動的定式化としての行列模型の研究が、より発展していくことを期待する。

最後に今後の展望について述べる。本論文の正則化においては、(4.19) 式から分かるように、多様体 $M$ の幾何的な情報をもつ量として埋め込み関数 $X^A$ やその微分 $\partial_{(a)}X^A$ が現れており、多様体 $M$ をより高次元の空間に埋め込むことで構成している。しかし実際の物理量などは、当然この埋め込みの方法には依存しないはずである。このことを確かめることは、非常に重要である。また本論文では Kähler 多様体 $M$ 上の関数 (場) に対する正則化を行い、その過程では Kähler 多様体の性質を用いている。これをより一般の多様体に拡張していくことも、今後の展望として挙げられる。

# 謝辞

本研究を進める上で、非常に多くの方にご助力頂きました。まず指導教員である土屋麻人教授には、些細な内容から本質的な議論まで非常に多くのご指導頂きました。心より感謝申し上げます。また議論の際には同じ研究室の水野優輝氏、世古竜也氏にもお力を頂きました。こちらも感謝致します。また最後に研究活動を経済的に支えてくださった家族にも心より感謝致します。

# 付録 A　$[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ の評価

この付録では 4 章で登場した、$[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ を具体的に計算していく。まずは $\mathcal{P}_{(a)}(\mathcal{P}_{(b)}T(\varphi))$ について、(4.19) 式の定義から以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{(a)}(\mathcal{P}_{(b)}T(\varphi)) &= \mathcal{P}_{(a)}(\hbar_p^{-1}(T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^A),[T(X^B),T(\varphi)]]) + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\varphi)]] + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^A),[T(X^B),T(\varphi)]] \\
&\quad + \hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

ここで 3 個目の等号については、$[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\varphi)]]$ を以下のように展開した。

$$\begin{aligned}
&[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\varphi)]] \\
&\quad = T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^A),[T(X^B),T(\varphi)]] + [T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)]
\end{aligned} \tag{A.2}$$

同様に $\mathcal{P}_{(b)}(\mathcal{P}_{(a)}T(\varphi))$ についても計算できるので、$[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}_{(a)}, \mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi) &= \hbar_p^{-2}(T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^A),[T(X^B),T(\varphi)]] \\
&\quad + T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] \\
&\quad - T(\partial_{(b)}X^B)T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]] \\
&\quad - T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\partial_{(a)}X^A)][T(X^A),T(\varphi)]) + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \hbar_p^{-2}(T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^A),[T(X^B),T(\varphi)]] \\
&\quad + T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] \\
&\quad - T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]] \\
&\quad + [T(\partial_{(a)}X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]] \\
&\quad - T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\partial_{(a)}X^A)][T(X^A),T(\varphi)]) + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \hbar_p^{-2}(T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[[T(X^A),T(X^B)],T(\varphi)] \\
&\quad + T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] \\
&\quad + [T(\partial_{(a)}X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]] \\
&\quad - T(\partial_{(b)}X^B)[T(X^B),T(\partial_{(a)}X^A)][T(X^A),T(\varphi)]) + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

2 個目の等号では、3 項目に対して $T(\partial_{(b)}X^B)T(\partial_{(a)}X^A) = T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B) - [T(\partial_{(a)}X^A), T(\partial_{(b)}X^B)]$ とした。また 3 個目の等号については、1 項目と 4 項目に対してヤコビ恒等式を用いた。4 章で述べたように $T(\varphi)$ は長方形行列である。よって (A.3) 中の $[[T(X^A), T(X^B)], T(\varphi)]$ などは 4 章で導入した $T'(X^A)$ を用いて $[[T(X^A), T(X^B)], T(\varphi)] = (T(X^A)T(X^B) - T(X^B)T(X^A))T(\varphi) - T(\varphi)(T'(X^A)T'(X^B) - T'(X^B)T'(X^A))$ として定義されていることに注意する。以下ではこの (A.3) 式の各項を評価していく。これからの計算では 3 章で見た、Toeplitz 演算子の漸近的性質 (3.51)、(3.52) 式を頻繁に用いる。

まず 3 項目について計算していく。(4.26) 式から $T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)$ は、以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&(T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B) \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= \sum_{r''}\sum_{n,K} T^{(r,r'')}\left(\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}}C^{v,r''^*;r}_{a'(a),(n);(j)}\omega_{ca'}\partial^c X^A\right)_{IK} T^{(r'',r')}\left(\sqrt{\frac{d'_r}{d_{r''}}}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);(n)}\omega_{db'}\partial^d X^B\right)_{KJ} \\
&= T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{ca'}\partial^c X^A\omega_{db'}\partial^d X^B\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

この計算から (A.3) 式 3 項目の $[T(\partial_{(a)}X^A), T(\partial_{(b)}X^B)]$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&[T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)] \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{ca'}\partial^c X^A\omega_{db'}\partial^d X^B\right)_{IJ} \\
&\quad - T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(b),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(a),(l);m(n)}\omega_{ca'}\partial^c X^B\omega_{db'}\partial^d X^A\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{ca'}\partial^c X^A\omega_{db'}\partial^d X^B\right)_{IJ} \\
&\quad - T^{(r,r')}\left(\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{b'(b),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{a'(a),(l);m(n)}\omega_{db'}\partial^c X^B\omega_{ca'}\partial^d X^A\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

2 個目の等号については、2 項目について和を取っている添え字 $a', b'$ と $c, d$ をそれぞれ入れ替えた。ここでクレブッシュゴルダン係数の部分 $\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}$ について表現行列 $R$ を用いて、以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)} \\
&= \sum_{r''}\sum_{m,n} d_r \int dg R^{\langle v\rangle}_{a'(a)}(g)R^{\langle r''^*\rangle}_{m(n)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)d_{r''}\int dh R^{\langle v\rangle}_{b'(b)}(h)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(h)R^{\langle r''\rangle}_{m(n)}(h) \\
&= d_r \int dg R^{\langle v\rangle}_{a'(a)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)\int dh R^{\langle v\rangle}_{b'(b)}(h)R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(h)\sum_{r''} d_{r''}\sum_n R^{\langle r''\rangle}_{n(n)}(g^{-1}h) \\
&= d_r \int dg R^{\langle v\rangle}_{a'(a)}(g)R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g)\int dh' R^{\langle v\rangle}_{b'(b)}(gh')R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(gh')\sum_{r''} d_{r''}\sum_n R^{\langle r''\rangle}_{n(n)}(h')
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

2 個目の等号では表現行列 $R$ のユニタリー性を用いて、$R^{\langle r''^*\rangle}_{m(n)}(g)$ を $R^{\langle r''^*\rangle}_{n(m)}(g^{-1})$ とした。また 3 個目の等号では、$h'=g^{-1}h$ とし Haar 測度の性質 $dh=dh'$ を用いた。ここで $R^{\langle r''\rangle}_{n(n)}(h')$ は (2.9) 式の展開から、任意の関数 $f:Spin^c(2n)\to\mathbb{C}$ に対して以下のようになることが分かる。

$$\int dh' f(h')\sum_{r''} d_{r''}\sum_{n} R^{\langle r''\rangle}_{n(n)}(h') = f(1) \tag{A.7}$$

よって (A.6) 式は以下のようになる。

$$\sum_{r''}\sum_{m,n} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);(j)} C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)} = d_r \int dg R^{\langle v\rangle}_{a'(a)}(g) R^{\langle r\rangle}_{i(j)}(g) R^{\langle v\rangle}_{b'(b)}(g) R^{\langle r'^*\rangle}_{k(l)}(g) \tag{A.8}$$

この式は $a'\leftrightarrow b'$、$a\leftrightarrow b$ に対して不変である。このことと (A.5) 式から $[T(\partial_{(a)}X^A),T(\partial_{(b)}X^B)]=O\left(\frac{1}{p}\right)$ であることが分かる。また (A.3) 式右辺 3 項目の $[T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]]$ については、(3.52) 式から係数の $\hbar_p^{-2}$ と合わせて、$\hbar_p^{-2}[T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]]=O(1)$ である。これらより (A.3) 式右辺 3 項目は $O\left(\frac{1}{p}\right)$ である。

$$[T(\partial_{(a)}X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),[T(X^A),T(\varphi)]] = O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{A.9}$$

続いて A.3) 式右辺 2 項目について評価していく。(4.30) 式を用いると $\hbar_p^{-1}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)]$ は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-1}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)] \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分})\\
&= T^{(r,r')}\left(-i\sum_{r''}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);j}\left(\nabla_{a'} C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{cb'}\partial^c X^B\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)\\
&= T^{(r,r')}\left(-i\sum_{r''}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}} C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);j} C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{cb'}\left(\nabla_{a'}\partial^c X^B\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

2 個目の等号ではクレブッシュゴルダン係数に対する微分について $\nabla_{a'}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}=0$ と、Kähler 構造の一般的性質 $\nabla_{a'}\omega_{cb'}=0$ を用いた。続いて $[T(X^B),T(\varphi)]$ については (3.52) 式を用いて以下のように評価する。

$$\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-1}[T(X^B),T(\varphi)] \text{の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分})\\
&\qquad = -iT^{(r,1)}\left(W^{de}\left(\partial_d X^B\right)\left(\nabla_e\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

(A.10)、(A.11)、(3.51) 式から (A.3) 式の右辺第 2 項 $T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)]$

は次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&\quad = -\sum_{r'}\sum_{l,K} T^{(r,r')}\left(\sum_{r''}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}}C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);j}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{cb'}\left(\nabla_{a'}\partial^c X^B\right)\right)_{IK} \\
&\qquad\qquad \times T^{(r,1)}\left(W^{de}\left(\partial_d X^B\right)\left(\nabla_e\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)\right)_{KJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= -T^{(r,1)}\left(\sum_{r'}\sum_{k,l}\sum_{r''}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_r}}C^{v,r''^*;r}_{a'(a),m(n);j}C^{v,r'^*;r''}_{b'(b),(l);m(n)}\omega_{cb'}\left(\nabla_{a'}\partial^c X^B\right)W^{de}\left(\partial_d X^B\right)\left(\nabla_e\tilde{\varphi}^{\langle r\rangle}_{(j)}\right)\right)_{IJ} \\
&\qquad\qquad + O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

ここで (A.12) 式の中の $\left(\nabla_{a'}\partial^c X^B\right)\left(\partial_d X^B\right)$ については、(4.29) 式のように計算すると 0 になる。以上の計算から (A.3) 式右辺第 2 項については、$O\left(\frac{1}{p}\right)$ となる。

$$
\hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)[T(X^A),T(\partial_{(b)}X^B)][T(X^B),T(\varphi)] = O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{A.13}
$$

ここで (A.3) 式右辺第 4 項について見ると、2 項目と比較して $a \leftrightarrow b, A \leftrightarrow B$ となっていることが分かる。したがって 2 項目と全く同じように計算することができ、4 項目もまた $O\left(\frac{1}{p}\right)$ となる。

ここまでの計算により、(A.3) 式は結局 1 項目以外は $O\left(\frac{1}{p}\right)$ となることが分かった。結局 (A.3) 式は次のように書ける。

$$
[\mathcal{P}_{(a)},\mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi) = \hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[[T(X^A),T(X^B)],T(\varphi)] + O\left(\frac{1}{p}\right) \tag{A.14}
$$

この式の $[T(X^A),T(X^B)]$ について、(3.49) 式の漸近展開を用いて $\hbar_p$ の 2 次までで展開する。

$$
\begin{aligned}
&([T(X^A),T(X^B)] \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&\qquad = \delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}[T^{(r,r)}(\{X^A,X^B\}\mathbf{1}_{E_r})_{IJ} \\
&\qquad = \delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}\Big( - i\hbar_p T^{(r,r)}(\{X^A,X^B\}\mathbf{1}_{E_r})_{IJ} \\
&\qquad\qquad + \hbar_p^2 T^{(r,r)}(C_2(X^A,X^B) - C_2(X^B,X^A))\mathbf{1}_{E_r})_{IJ} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

ここで展開係数 $C_2$ については、(3.50) 式で定義されている。(3.50) 式から分かるように、$C_2$ には $R^{E_2}_{\beta\gamma}$ が含まれているため、一般に $C_2$ は考えているベクトルバンドルの表現 $r$ に依存する。このため表現 $r$ に依存しない $\tilde{C}_2$ を次のように定義する。

$$
\tilde{C}_2(X^A,X^B) = C_2(X^A,X^B) - C_2(X^B,X^A) + \frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B) \tag{A.16}
$$

この定義から、$\tilde{C}_2$ は明らかに表現 $r$ に依存しない。$\tilde{C}_2$ を用いて (A.15) 式を書き直すと以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&([T(X^A), T(X^B)] \text{ の } ((r,j),(r',l)) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= \delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}\Bigg( -i\hbar_p T^{(r,r)}(\{X^A, X^B\}\mathbf{1}_{E_r})_{IJ} + \hbar_p^2 T^{(r,r)}(\tilde{C}_2(X^A, X^B))\mathbf{1}_{E_r})_{IJ} \\
&\qquad + \hbar_p^2 T^{(r,r)}\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta} - G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\mathbf{1}_{E_r}\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

この計算と同様に $[T'(X^A), T'(X^B)]$ についても考える。4.1 節で述べたように $T'(X^A)$ については、自明表現のゼロモードを用いて定義されているので、$[T'(X^A), T'(X^B)]$ の計算では、(A.16) 式での $R^{E_r}_{\beta\gamma}$ が $R^{E_{trivial}}_{\beta\gamma}$ に変わる。$R^{E_{trivial}}_{\beta\gamma} = 0$ であるため、$[T'(X^A), T'(X^B)]$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&([T'(X^A), T'(X^B)] \text{ の } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= -i\hbar_p T^{(1,1)}\left(\{X^A, X^B\}\right)_{IJ} + \hbar_p^2 T^{(1,1)}\left(\tilde{C}_2(X^A, X^B)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

これらを用いて、(A.14) 式を計算していく。

まず $\hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[-i\hbar_p T(\{X^A, X^B\}), T(\varphi)]$ については、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&(\hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[-i\hbar_p T(\{X^A, X^B\}), T(\varphi)] \text{ の } (r,j) \text{ ブロックの } (I,J) \text{ 成分}) \\
&= -T^{(r,1)}\Bigg(\sum_{r'}\sum_{k,l}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{a'(a),k(l);j}\omega_{c'a'}(\partial^{c'}X^A)\sum_{r''}\sum_{m,n}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_{r'}}}C^{v,r'^*;r}_{b'(b),m(n);k(l)}\omega_{cb'}(\partial^c X^B) \\
&\qquad W^{fg}\left(\partial_f W^{de}(\partial_f W^{de}(\partial_d X^A)(\partial_e X^B))\left(\nabla_g\varphi^{\langle r''\rangle}_{m(n)}\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= -T^{(r,1)}\Bigg(\sum_{r'}\sum_{k,l}\sqrt{\frac{d_{r'}}{d_r}}C^{v,r'^*;r}_{a'(a),k(l);j}\omega_{c'a'}(\partial^{c'}X^A)\sum_{r''}\sum_{m,n}\sqrt{\frac{d_{r''}}{d_{r'}}}C^{v,r'^*;r}_{b'(b),m(n);k(l)}\omega_{cb'}(\partial^c X^B) \\
&\qquad W^{fg}W^{de}\left(\nabla_f(\partial_d X^A)(\partial_e X^B))\left(\nabla_g\varphi^{\langle r''\rangle}_{m(n)}\right)\right)_{IJ} + O\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

ここで 2 個目の等号では、Kähler 構造の性質 $\nabla_f W^{de} = 0$ を用いた。また 3 個目の等号では、以下のように計算している。

$$
\begin{aligned}
&(\partial^{c'}X^A)(\partial^c X^B)\left(\nabla_f(\partial_d X^A)(\partial_e X^B)\right) \\
&= (\partial^{c'}X^A)(\partial^c X^B)(\nabla_f\partial_d X^A)(\partial_e X^B) + (\partial^{c'}X^A)(\partial^c X^B)(\partial_d X^A)(\nabla_f\partial_e X^B) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

この式の 2 行目の $(\partial^{c'}X^A)(\nabla_f\partial_d X^A)$ などは、(4.29) 式での計算から 0 になる。よって (A.19) 式のように評価することができ、(A.17) 式と (A.18) 式の第 1 項目からの寄与は、

$O\left(\frac{1}{p}\right)$ となる。続いて $\hbar_p^{-2}T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)[\hbar_p^2 T(\tilde{C}_2(X^A,X^B),T(\varphi)]$ について考える。$\tilde{C}_2$ は先に述べたようにベクトルバンドルの表現 $r$ に依存しない。このことと、(3.51) 式と (3.52) 式から $O\left(\frac{1}{p}\right)$ となる。よって (A.17) 式と (A.18) 式の第 2 項目からの寄与に関しても $O\left(\frac{1}{p}\right)$ と評価できる。結局、最終的に $O(1)$ として残る寄与は (A.17) 式の 3 項目からの寄与のみとなる。

以上の計算から $[\mathcal{P}_{(a)},\mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)$ は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}&[\mathcal{P}_{(a)},\mathcal{P}_{(b)}]T(\varphi)\\&\quad=T(\partial_{(a)}X^A)T(\partial_{(b)}X^B)T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)T(\varphi)+O\left(\frac{1}{p}\right)\end{aligned}\tag{A.20}$$

ここで $T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)$ は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}&\left(T\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\right)\text{の}((r,j),(r',l))\text{ブロックの}(I,J)\text{成分}\right)\\&\quad=\delta^{\langle r\rangle\langle r'\rangle}\delta_{jl}T^{(r,r)}\left(-\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta}G^{\gamma\delta}-G^{\delta\beta}G^{\gamma\alpha})(\partial_\alpha X^A)R^{E_r}_{\beta\gamma}(\partial_\delta X^B)\mathbf{1}_{E_r}\right)_{IJ}\end{aligned}\tag{A.21}$$

# 参考文献


[1] Tom Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and Leonard Susskind. M theory as a matrix model: A conjecture. *Phys. Rev. D*, Vol. 55, pp. 5112–5128, 1997.

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, and A. Tsuchiya. A Large N reduced model as superstring. *Nucl. Phys. B*, Vol. 498, pp. 467–491, 1997.

[3] Mitsuaki Hirasawa, Konstantinos N. Anagnostopoulos, Takehiro Azuma, Kohta Hatakeyama, Jun Nishimura, Stratos Papadoudis, and Asato Tsuchiya. The effects of SUSY on the emergent spacetime in the Lorentzian type IIB matrix model. *PoS*, Vol. CORFU2023, p. 257, 2024.

[4] Konstantinos N. Anagnostopoulos, Takehiro Azuma, Mitsuaki Hirasawa, Jun Nishimura, Asato Tsuchiya, and Naoyuki Yamamori. Impact of supersymmetry on the dynamical emergence of the spacetime in the type IIB matrix model with the Lorentz symmetry "gauge fixed". In *42th International Symposium on Lattice Field Theory*, 4 2026.

[5] Konstantinos N. Anagnostopoulos, Takehiro Azuma, Mitsuaki Hirasawa, Jun Nishimura, Stratos Papadoudis, and Asato Tsuchiya. The emergence of (3+1)-dimensional expanding spacetime from complex Langevin simulations of the Lorentzian type IIB matrix model with deformations. 4 2026.

[6] Yuhma Asano, Jun Nishimura, Worapat Piensuk, and Naoyuki Yamamori. Defining the Type IIB Matrix Model without Breaking Lorentz Symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 134, No. 4, p. 041603, 2025.

[7] Yuhma Asano. Quantisation of type IIB superstring theory and the matrix model. *JHEP*, Vol. 10, p. 082, 2024.

[8] H.C. Steinacker. *Quantum Geometry, Matrix Theory, and Gravity*. Cambridge University Press, 2024.

[9] Harold C. Steinacker and Tung Tran. Quantum hs-Yang-Mills from the IKKT matrix model. *Nucl. Phys. B*, Vol. 1005, p. 116608, 2024.

[10] Robert Brandenberger and Julia Pasiecznik. Origin of the SO(9)→SO(3)×SO(6) symmetry breaking in the type IIB matrix model. *Phys. Rev. D*, Vol. 112, No. 2, p. 026006, 2025.

[11] Samuel Laliberte. Effective mass and symmetry breaking in the ishibashi-kawai-kitazawa-tsuchiya matrix model from compactification. *Phys. Rev. D*, Vol. 110, p. 026024, Jul 2024.

[12] Sean A. Hartnoll and Jun Liu. The polarised IKKT matrix model. *JHEP*, Vol. 03, p. 060, 2025.

[13] Alessandro Manta, Harold C. Steinacker, and Tung Tran. $\mathfrak{hs}$-extended gravity from the IKKT matrix model. *JHEP*, Vol. 02, p. 031, 2025.

[14] Alessandro Manta and Harold C. Steinacker. Minimal covariant quantum space-time. *J. Phys. A*, Vol. 58, No. 17, p. 175204, 2025.

[15] Alessandro Manta and Harold C. Steinacker. Dynamical covariant quantum space-time with fuzzy extra dimensions in the IKKT model. *JHEP*, Vol. 02, p. 062, 2026.

[16] Keiichiro Hattori, Yuki Mizuno, and Asato Tsuchiya. Regularization of Matrices in the Covariant Derivative Interpretation of Matrix Models. *PTEP*, Vol. 2024, No. 12, p. 123B06, 2024.

[17] Jumpei Gohara and Akifumi Sako. Quantization of Lie–Poisson algebra and Lie algebra solutions of mass-deformed type IIB matrix model. *J. Math. Phys.*, Vol. 67, No. 2, p. 022301, 2026.

[18] Pei-Ming Ho, Hikaru Kawai, and Harold C. Steinacker. General Relativity in IIB matrix model. *JHEP*, Vol. 02, p. 070, 2026.

[19] Christian Gaß and Harold C. Steinacker. Spatially flat cosmological quantum space-times. *Phys. Rev. D*, Vol. 113, No. 2, p. 024050, 2026.

[20] Henry Liao and Reishi Maeta. A New Type of Saddle in the Euclidean IKKT Matrix Model and Its Emergent Geometry. 12 2025.

[21] Harold C. Steinacker. Modified gravity at large scales on quantum spacetime in the IKKT model. *JHEP*, Vol. 04, p. 044, 2026.

[22] Shota Komatsu, Adrien Martina, João Penedones, Antoine Vuignier, and Xiang Zhao. Einstein gravity from a matrix integral. Part I. *JHEP*, Vol. 12, p. 029, 2025.

[23] Shota Komatsu, Adrien Martina, Joao Penedones, Antoine Vuignier, and Xiang Zhao. Einstein gravity from a matrix integral. Part II. *JHEP*, Vol. 12, p. 030, 2025.

[24] Sean A. Hartnoll and Jun Liu. Statistical physics of the polarised IKKT matrix model. *SciPost Phys.*, Vol. 19, No. 4, p. 099, 2025.

[25] Chien-Yu Chou, Jun Nishimura, and Cheng-Tsung Wang. Monte Carlo Studies of the Emergent Spacetime in the Polarized Type IIB Matrix Model. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 135, No. 22, p. 221601, 2025.

[26] Chien-Yu Chou, Jun Nishimura, and Ashutosh Tripathi. Inequivalence between the Euclidean and Lorentzian Versions of the Type IIB Matrix Model from Lefschetz Thimble Calculations. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 134, No. 21, p. 211601, 2025.

[27] 土屋麻人. 弦理論と行列模型:弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方. サイエンス社, 2014.

[28] Masanori Hanada, Hikaru Kawai, and Yusuke Kimura. Describing curved spaces by matrices. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 114, pp. 1295–1316, 2006.

[29] Sang-Woo Kim, Jun Nishimura, and Asato Tsuchiya. Expanding (3+1)-dimensional universe from a Lorentzian matrix model for superstring theory in (9+1)-dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 108, p. 011601, 2012.

[30] Konstantinos N. Anagnostopoulos, Takehiro Azuma, Kohta HATAKEYAMA, Mitsuaki Hirasawa, Yuta Ito, Jun NISHIMURA, Stratos Kovalkov Papadoudis, and Asato Tsuchiya. Progress in the numerical studies of the type iib matrix model. *European Physical Journal-Special Topics*, Vol. 232, pp. 3681–, 2023.

[31] Martin Bordemann, Eckhard Meinrenken, and Martin Schlichenmaier. Toeplitz quantization of Kahler manifolds and gl(N), N —> infinity limits. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 165, pp. 281–296, 1994.

[32] Eli Hawkins. Geometric quantization of vector bundles and the correspondence with deformation quantization. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 215, No. 2, p. 409–432, December 2000.

[33] Hiroyuki Adachi, Goro Ishiki, and Satoshi Kanno. Vector bundles on fuzzy Kähler manifolds. *PTEP*, Vol. 2023, No. 2, p. 023B01, 2023.

[34] Keiichiro Hattori, Tatsuya Seko, and Asato Tsuchiya. *Description of curved spacetimes by finite-size matrices in the type IIB matrix model.* PTEP に投稿中, 2026.

[35] Hiroyuki Adachi, Goro Ishiki, Satoshi Kanno, and Takaki Matsumoto. Laplacians on Fuzzy Riemann Surfaces. *Phys. Rev. D*, Vol. 103, No. 12, p. 126003, 2021.

[36] Hiroyuki Adachi, Goro Ishiki, Satoshi Kanno, and Takaki Matsumoto. Matrix regularization for tensor fields. *PTEP*, Vol. 2023, No. 1, p. 013B06, 2023.